

Frankfurt a/m 1975

V. Maruhn . Resvani . Youss ef

Die aktive Wirkung
der
magnetischen Eigenschaften von Eisen

Inaugural-Präsentation
zur
Erreichung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorlegt Felix Landwehrmann, Sohn des
Herrn Hofrath Dr. Felix Landwehrmann
zu Frankfurt am Main

von
Felix Landwehrmann, Sohn des
Herrn Hofrath Dr. Felix Landwehrmann
zu Frankfurt am Main

Frankfurt am Main
1874



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550826_0049

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

Kollektive Beschreibung
der
magnetischen Eigenschaften von gg-Kernen

Bekannte:

Prof. Dr. W. Stoll

Leiter der Arbeit:

Prof. Dr. W. Bräunig

Präsident:

Prof. Dr. W. Bräunig

Zweituntersucher:

Prof. Dr. H. Bräunig

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

von
Vida Maruhn geb. Rezvani-Youssef
aus
Teheran (Iran)

Frankfurt am Main
Mai 1975

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

Dekan:	Prof. Dr. W. Pohlitz
Leiter der Arbeit:	Prof. Dr. W. Greiner
Erstgutachter:	Prof. Dr. W. Greiner
Zweitgutachter:	Prof. Dr. R. Dreizler

Tag der mündlichen Prüfung: 23. Juni 1975

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Das verallgemeinerte Kollektivmodell	6
3. Die Potentialenergieflaeche	12
4. Trennung der Protonen- und Neutronendeformationen	16
5. Drehimpulse und Rotationsinvarianz	21
6. Die Symmetrieenergie	25
7. Die Paarkraft	36
8. Der Hamiltonoperator und seine Diagonalisierung	41
9. Der Operator des magnetischen Moments	50
10. Der elektrische Quadrupoloperator	54
11. g_R -Faktor, Quadrupolmoment und Uebergangs- wahrscheinlichkeiten	56
12. Ein exakt loesbares Modell	58
13. Das Greinersche Modell	63
14. Stoerungsrechnung	67
15. Ergebnisse und Zusammenfassung	72
Literaturverzeichnis	99

1. Einleitung

Im Verstaendnis der Niederenergieeigenschaften der gg-Kerne mit Hilfe des Kollektivmodells haben die letzten Jahre einige wesentliche Fortschritte gebracht [1-16]. Eines der neuentwickelten Modelle, das sich durch einen besonders breiten Anwendungsbereich auszeichnet, ist das von G. Gneuss und W. Greiner entwickelte verallgemeinerte Kollektivmodell (im folgenden mit VKM abgekuerzt). Dieses Modell verzichtet auf eine strenge Einteilung der gg-Kerne in sphaerische und deformierte und beschreibt dagegen alle Typen von gg-Kernen durch passende Wahl der Parameter des kollektiven Potentials. Auf diese Weise koennen sphaerische Kerne mit harmonischen oder anharmonischen Vibrationsspektren, axialsymmetrisch oder triaxial deformierte Kerne sowie alle moeglichen Arten von Uebergaengen zwischen diesen Extremfaellen einheitlich behandelt werden.

Da die Niederenergieeigenschaften hauptsaechlich durch die Quadrupoldeformationen bestimmt werden, laesst das VKM nur Deformationen dieser Multipolaritaet zu. Zusaetzlich zu den Energieniveaus liefert dieses Modell auch befriedigende Werte fuer die mittleren quadratischen Radian, die $B(E2)$ -Werte und die Quadrupolmomente, wobei fuer die letzteren beiden noch Annahmen ueber die Ladungsverteilung im Kern eingehen.

Im Gegensatz zu diesen Erfolgen bei der Beschreibung der Spektren und der elektrischen Momente und Uebergangswahrscheinlichkeiten ist das Modell jedoch nicht in der Lage, die magnetischen Eigenschaften der tief-
liegenden kollektiven Zustaende zu beschreiben. Dazu zaehlen insbesondere die Rotations-g-Faktoren und die experimentell beobachteten Beimischungen von M1-Strahlung bei Uebergaengen, bei denen sowohl M1- wie auch E2-Strahlung erlaubt sind.

Man erhaelt im VKM ebenso wie in jedem anderen Kollektivmodell, das keinen Unterschied zwischen Protonen und Neutronen macht, fuer den Rotations-g-Faktor den fuer alle Kerne einheitlichen Ausdruck

$$g_R = Z / A . \quad (1.1)$$

Experimentell dagegen werden meist kleinere Werte beobachtet, die ausserdem fuer einen gegebenen Kern nicht konstant sind, sondern sogar innerhalb der Rotationsbanden variieren.

Die Uebergangswahrscheinlichkeiten fuer M1-Strahlung werden in diesem Modell in jedem Fall Null, wofuer wieder die unterschiedslose Behandlung von Protonen und Neutronen verantwortlich ist. Experimentell dagegen treten in vielen Faellen M1- und E2-Strahlung mit vergleichbarer Intensitaet auf. Man charakterisiert die Beimischung von M1-Strahlung meist durch das sog. Mischungsverhaeltnis [17,18]:

$$\delta = -\frac{\sqrt{3}}{10} \frac{E_{\gamma}}{\hbar c} \sqrt{\frac{B(E2 / I_i \rightarrow I_f)}{B(M1 / I_i \rightarrow I_f)}} \quad (1.2)$$

Das hier angegebene Vorzeichen entspricht der Definition von Krane und Steffen [17].

Um eine bessere Beschreibung der erwaehten magnetischen Kerneigenschaften zu bekommen, ohne den Rahmen eines Kollektivmodells zu verlassen, liegt es nahe, die gleichartige Behandlung von Protonen und Neutronen aufzugeben, die fuer die Schwierigkeiten verantwortlich zu sein scheint.

Ein erster Versuch, aus dem unterschiedlichen mikroskopischen Verhalten der Protonen und Neutronen Rueckschluesse auf den Rotations-g-Faktor zu ziehen, stammt von Nilsson und Prior [20]. Sie gingen von der Tatsache aus, dass die Protonen untereinander staerkere Paarkraftwechselwirkung zeigen als die Neutronen unter sich. Dieser Unterschied fuehrt zu einem kleineren Traegheitsmoment fuer die Protonen. Nun ist das magnetische Moment eines Kerns gegeben durch

$$\mu = g_L L_P \quad , \quad g_L = 1 \quad , \quad (1.3)$$

wobei L_P der Drehimpuls der Protonen ist, so dass man fuer den g-Faktor, dem Verhaeltnis zwischen magnetischem Moment und Gesamtdrehimpuls des

Kerns,

$$g_K = \frac{L_P}{L_P + L_n} \quad (1.4)$$

erhaelt. Nimmt man zusaetzlich an, dass Protonen und Neutronen stets mit der gleichen (klassischen) Winkelgeschwindigkeit rotieren, so folgt weiter

$$g_K = \frac{\Theta_P}{\Theta_P + \Theta_n} \quad (1.5)$$

mit Θ_P und Θ_n den Traegheitsmomenten der Protonen- bzw. Neutronenverteilungen. Da der oben erwaehte Paarkrafteffekt das Verhaeltnis Θ_P/Θ_n der Traegheitsmomente unter den klassischen Wert Z/N absinken laesst, wird damit wirklich

$$g_K \leq Z/A \quad (1.6)$$

Bei all diesen Ueberlegungen wurde angenommen, dass es wirklich erlaubt ist, Protonen und Neutronen mikroskopisch voellig getrennt voneinander zu behandeln, so dass es einen Sinn hat, z. B. vom Traegheitsmoment der Protonen in einem Kern zu reden. Dies ist theoretisch dadurch begruendet, dass die Paarkraft zwischen verschiedenartigen Nukleonen wesentlich schwaecher wirkt als unter gleichartigen, sofern man sich auf schwere Kerne beschraenkt (die Ursache hierfuer ist im wesentlichen die verschiedene Lage der Fermikanten, s. [21]). Demnach sollten die Protonen sich zu einer gemeinsamen kollektiven Bewegung zusammenkoppeln, und ebenso die Neutronen, waehrend die Wechselwirkung dieser beiden kollektiven Systeme erst das gemeinsame Verhalten, d. h. das Verhalten des gesamten Kerns, bestimmt.

Ein kollektives Modell, das auch die magnetischen Kerneigenschaften richtig beschreiben soll, kann also formuliert werden, indem man Protonen

und Neutronen getrennt, aber jeweils kollektiv, z. B. durch Angabe zweier verschiedener Deformationstensoren α_p und α_n , beschreibt. Dabei erhaelt man allerdings durch die Symmetrieenergie, die zu starke Abweichungen der beiden raeumlichen Verteilungen voneinander zu verhindern sucht, eine starke Kopplung zwischen den Deformationen, so dass in praxi nur geringe Abweichungen auftreten. Ein Ansatz dieser Art wurde zuerst von A. Faessler [22] eingefuehrt.

Die erwaehte starke Kopplung zwischen α_p und α_n laesst es guenstiger erscheinen, statt ihrer als neue Freiheitsgrade eine "Schwerpunkts-"

$$\alpha = \frac{B_p \alpha^p + B_n \alpha^n}{B} \quad (1.7)$$

(B_p und B_n sind Massenparameter) und eine Relativkoordinate

$$\xi = \alpha^n - \alpha^p \quad (1.8)$$

zu definieren. α beschreibt dann die gewoehnlichen Quadrupoloszillationen, die den Kern als Ganzes kennzeichnen, waehrend ξ Schwingungen der Oberflaechen der Protonen bzw. Neutronen gegeneinander beschreibt. Nach [22] sind diese Schwingungen wegen der starken Kopplung hochenergetisch (ca. bei 15 MeV) und von kleiner Amplitude. Die Energie dieser Oberflaechen-schwingungen liegt damit in derselben Gegend wie die El-Riesenresonanz, so dass sie schwer nachzuweisen sein duerften.

Die unterschiedliche Bewegung der Protonen und Neutronen fuehrt ausserdem dazu, dass das magnetische Moment und der Gesamtdrehimpuls auf sehr viel kompliziertere Weise zusammenhaengen. I. a. wird der g-Faktor tensoriell und haengt von der Deformation ab. Letzteres fuehrt zu nichtverschwindenden Uebergangswahrscheinlichkeiten fuer M1-Strahlung.

In dieser Arbeit soll versucht werden, das VKM durch die Einfuehrung

verschiedener Quadrupoldeformationen fuer Protonen und Neutronen zu verallgemeinern und die Dynamik dieser kollektiven Koordinaten in konsistenter Weise zu beschreiben, wobei fuer das Kopplungspotential physikalisch motivierte Ansaetze gemacht werden.

Bevor die dazu noetigen Erweiterungen des VKM im einzelnen besprochen werden, wird im naechsten Abschnitt zunaechst ein Abriss dieses Modells gegeben. Anschliessend werden die Wechselwirkungen zwischen den Freiheitsgraden α und ξ und ihre physikalischen Ursachen eroertert. Vor einer Anwendung auf konkrete Probleme, deren Ergebnisse abschliessend diskutiert werden, werden schliesslich moegliche Vernachlaessigungen und Naehierungen, die aus der speziellen Struktur und Groesse der Wechselwirkungen resultieren, untersucht und begruendet.

2. Das verallgemeinerte Kollektivmodell

Die Quadrupoldeformationen der Kernoberflaeche koennen mit Hilfe der Koordinaten $\alpha_{2\mu}$ beschrieben werden, die man formal als Koeffizienten bei der Entwicklung des Kernradius als Funktion der Winkel nach Kugelfunktionen erhaelt :

$$R(\vartheta, \varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{\mu} \alpha_{2\mu} (-1)^{\mu} Y_{2,-\mu}(\vartheta, \varphi) \right) \quad (2.1)$$

Darin geht die Annahme ein, dass Protonen und Neutronen dieselbe raeumliche Verteilung haben und somit durch dieselben Parameter $\alpha_{2\mu}$ gekennzeichnet sind. Diese Annahme muss allerdings schon bei der kollektiven Beschreibung der Riesenresonanzen fallengelassen werden, wobei jedoch nur Dichteunterschiede zwischen Protonen und Neutronen im Kerninneren und keine Verschiebungen der Oberflaechen gegeneinander betrachtet werden [26-28]. Fuer die meisten Niederenergieeigenschaften der Kerne, fuer die man ueberhaupt eine sinnvolle Beschreibung durch ein Quadrupol-Kollektivmodell erwarten wuerde, zeigt sich jedoch die Annahme gleicher Deformation von Protonen und Neutronen als durchaus hinreichend. Zu diesen Eigenschaften zaehlen z. B. die kollektiven Niederenergiespektren, die Quadrupolmomente der entsprechenden Zustaeude und die B(E2)-Werte fuer Uebergaenge zwischen ihnen.

Das verallgemeinerte Kollektivmodell (VKM) erlaubt die Berechnung aller dieser Groessen, wozu als Grundlage ein kollektiver Hamiltonoperator dient, der eine Funktion der $\alpha_{2\mu}$ und der zugehoerigen kanonisch konjugierten Impulse ist. Offensichtlich bildet solch ein Hamiltonoperator eine vollstaendige Beschreibung des Quadrupolverhaltens, und eine Kenntniss der Eigenzustaende erlaubt die Berechnung der Matrixelemente jedes Operators, der als Funktion der $\alpha_{2\mu}$ geschrieben werden kann.

Aus Gl. (2.1) kann man leicht einige mathematische Eigenschaften der $\alpha_{2\mu}$ ablesen. Aus der Forderung nach Realitaet des Kernradius und der Eigenschaft $Y_{2\mu}^* = (-1)^{\mu} Y_{2,-\mu}$ der Kugelfunktionen erhaelt man

$$\alpha_{2\mu}^* = (-1)^\mu \alpha_{2,-\mu} \quad (2.2)$$

Die Transformationseigenschaften der $\alpha_{2\mu}$ unter Raumdrehungen folgen ebenfalls unmittelbar aus denen der $Y_{2\mu}$. Die Transformationsgleichung lautet :

$$\sum_{\mu=-2}^{+2} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}^*(\psi, \varphi) = \sum_{\mu=-2}^{+2} \alpha'_{2\mu} Y_{2\mu}^*(\psi', \varphi') \quad (2.3)$$

d. h. die $\alpha_{2\mu}$ transformieren sich wie sphaerische Tensoren zweiter Stufe. Diese Eigenschaft der $\alpha_{2\mu}$ ist von immenser Bedeutung fuer die mathematische Formulierung des Modells, denn sie bewirkt, dass alle Ergebnisse aus der Theorie der irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe angewendet werden koennen. Wie in Ref. [11] kurz dargelegt ist, kann man u. a. saemtliche in diesem Modell benoetigten Matrixelemente mit rein gruppentheoretischen Methoden berechnen.

Analog zur klassischen Mechanik wird der zu $\alpha_{2\mu}$ kanonisch konjugierte Impuls $\pi_{2\mu}$ aus der Lagrangefunktion L des Systems mittels der Definition

$$\pi_{2\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_{2\mu}} \quad (2.4)$$

eingefuehrt. Die Impulse $\pi_{2\mu}$ transformieren sich unter Drehungen kontragredient zu den $\alpha_{2\mu}$. In der Praxis ist es jedoch zweckmaessiger, gleich den Hamiltonoperator anzusetzen, wobei der kinetische Teil unveraendert aus dem harmonischen Vibrator uebernommen wird, so dass derselbe einfache Zusammenhang zwischen $\alpha_{2\mu}$ und $\pi_{2\mu}$ gegeben ist.

Der Ansatz fuer den kollektiven Hamiltonoperator muss folgende drei Forderungen beruecksichtigen :

- 1) Der Hamiltonoperator soll eine rotations-, raum- und zeitungkehr-

invariante Funktion der Variablen $\alpha_{2\mu}$ und $\pi_{2\mu}$ sein, d. h. mathematisch ausgedrueckt, er soll ein zeitungkehrinvarianter Skalar positiver Paritaet sein.

2) Der Ansatz fuer den Hamiltonoperator muss genuegend allgemein sein, um alle Typen von gg-Kernen, deren Niederenergieverhalten durch Quadrupolanregungen bestimmt wird, zu beschreiben, angefangen von den sphaeerischen Vibratoren ueber die anharmonischen Vibratoren bis zu den stark deformierten axialsymmetrischen oder triaxialen Rotatoren. Ausserdem sollen die Wechselwirkungen zwischen den Quadrupolfreiheitsgraden, d. h. zwischen β - und γ -Vibrationen und der Rotation, beruecksichtigt werden.

3) Der Hamiltonoperator soll eine moeglichst einfache mathematische Struktur besitzen und insbesondere in einer geeigneten Basis leicht zu berechnende Matrixelemente ergeben.

Die erste dieser Forderungen laesst sich am einfachsten erfuellen, wenn man den Ansatz von Anfang an explizit invariant macht, d. h. in diesem Fall nur zu Skalaren gekoppelte Kombinationen der $\alpha_{2\mu}$ und $\pi_{2\mu}$ zulaesst, wobei die Forderung nach Zeitumkehrinvarianz und positiver Paritaet noch einige moegliche Kombinationen ausschliesst. Z. B. verbietet die Zeitumkehrinvarianz alle Terme mit einer ungeraden Anzahl von $\pi_{2\mu}$. Als mathematisch einfachster Ansatz bietet sich eine Potenzreihe in den $\alpha_{2\mu}$ und $\pi_{2\mu}$ an, wobei die einzelnen Terme nach den ueblichen Verfahren der Drehimpulskopplung zum resultierenden Gesamtdrehimpuls Null gekoppelt werden muessen. Damit ist die Struktur des Operators bis zu einer vorgegebenen Ordnung der Entwicklung eindeutig festgelegt, wenn man davon absieht, dass bei der Wahl der Darstellung der irreduziblen Tensorprodukte eine gewisse Willkuer moeglich ist. Das ist jedoch irrelevant, da die verschiedenen Darstellungen durch unitaere Transformationen ineinander uebergefuehrt werden koennen. In dieser Arbeit wird die Schreibweise von Racah [29,30] benutzt.

Nach diesen Ueberlegungen wird der Hamiltonoperator in der folgenden

Form angesetzt :

$$\begin{aligned}
 H = & P_{\alpha} [\pi^4 \times \pi^2]^{[0]} \\
 & + C_2 [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} \\
 & + C_3 [[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \alpha^2]^{[0]} \\
 & + C_4 [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} \\
 & + C_5 [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} [[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \alpha^2]^{[0]} \\
 & + C_6 [[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \alpha^2]^{[0]} [[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \alpha^2]^{[0]} \\
 & + D_6 [\alpha^4 \times \alpha^2]^{[0]} [\alpha^4 \times \alpha^2]^{[0]} [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} .
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Es mag zunaechst verblueffen, dass viele denkbare Kopplungsmoeglichkeiten nicht auftreten. In der Tat sind jedoch alle unabhaengigen Terme bis zur sechsten Ordnung in $\alpha_{2\mu}$ angegeben. Man kann naemlich zeigen, dass alle unabhaengigen Terme aus den sogenannten Grundtensoren

$$L_2 = [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} \tag{2.6}$$

$$L_3 = [[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \alpha^2]^{[0]}$$

durch Multiplikation aufgebaut werden koennen [31]. Alle anderen denkbaren Kopplungsformen gegebener Ordnung koennen auf Summen von Produkten dieser beiden Ausdruecke zurueckgefuehrt werden.

Es bleibt noch das Problem, ob der Ansatz (2.5) allgemein genug im Sinne von Forderung 2 ist. Das laesst sich nur aus der Erfahrung beantworten. Umfangreiche Untersuchungen von G. Gneuss und W. Greiner [8-11] haben gezeigt, dass man tatsaechlich alle wesentlichen Kerntypen mit einer Entwicklung bis zu sechster Ordnung in den $\alpha_{2\mu}$, wie sie in Gl. (2.5) angegeben ist, erfassen kann. Zusaetzliche Terme erschweren nur die Rechnung, ohne zu wesentlicher Verbesserung zu fuehren.

Fuer die praktische Diagonalisierung des Hamiltonoperators (2.5) hat sich eine Basis aus Eigenfunktionen des harmonischen Quadrupoloszil-

lators als am besten geeignet herausgestellt. Der Hamiltonoperator der Basis ist

$$H_B = B_B [\dot{\alpha}^2 \times \dot{\alpha}^2]^{(0)} + C_B [\alpha^2 \times \alpha^2]^{(0)} . \quad (2.7)$$

Aehnlich wie beim gewoehnlichen harmonischen Oszillator kann man durch

$$\alpha_{2\mu} = \frac{1}{2} \sqrt{\hbar \sqrt{\frac{5}{B_2' C_2'}}} (\beta_{2\mu}^+ + (-)^{\mu} \beta_{-2\mu}) \quad (2.8)$$

$$\pi_{2\mu} = -i \sqrt{\hbar \sqrt{\frac{B_2' C_2'}{5}}} (\beta_{2\mu} - (-)^{\mu} \beta_{-2\mu}^+)$$

zu Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\beta_{2\mu}^+$ bzw. $\beta_{2\mu}$ uebergehen und erhaelt dann Zustaende mit N Phononen durch N-faches Anwenden des Erzeugungsoperators auf den Vakuumzustand :

$$|N\rangle = (\underbrace{\beta_{2\mu}^+ \dots \beta_{2\mu}^+}_{N\text{-fach}}) |0\rangle . \quad (2.9)$$

Dabei ist allerdings nicht beruecksichtigt, dass die N Operatoren, die ja jeder fuer sich ein irreduzibler Tensor vom Rang zwei sind, nach einer grossen Zahl verschiedener Kopplungsschemata zu einem Gesamtdrehimpuls gekoppelt werden koennen. Die resultierenden Basiszustaende mit gutem Drehimpuls lassen sich rein gruppentheoretisch durch das Studium der irreduziblen Darstellungen der SU(5) klassifizieren. Als Ergebnis erhaelt man Eigenzustaende der Form $|N, v, l, \alpha, m\rangle$, die durch die Quantenzahlen N (Phononenzahl), v (Senioritaet), l (Drehimpuls), α (zusaetzliche Quantenzahl im Entartungsfall) und m (z-Komponente des Drehimpulses) charakterisiert werden.

Als weiteres Ergebnis der gruppentheoretischen Betrachtung folgen unmittelbar die Matrixelemente der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zwischen den Basiszustaenden, aus denen man dann nach Gl. (2.8) die

Matrixelemente von $\alpha_{2\mu}$ und $\pi_{2\mu}$ sowie aller aus ihnen aufgebauten Ausdrücke berechnen kann. Einzelheiten zur Berechnung der Matrixelemente findet man in Ref. [32].

Es ist klar, dass der bedeutendste Vorteil der beschriebenen Basis die leichte Gewinnung der Matrixelemente ist. Dadurch werden einige Nachteile aufgewogen, wie z. B. die relativ grosse Zahl von Basiszuständen, die man zur Diagonalisierung von Potentialen mit stark deformiertem Minimum benötigt. Die Grösse der Matrizen wird jedoch dadurch etwas verringert, dass der Hamiltonoperator ein Skalar ist, und somit in Unterräumen mit festem Drehimpuls der Basiszustände getrennt diagonalisiert werden kann. Bezüglich der magnetischen Quantenzahl sind die resultierenden Eigenzustände genauso entartet wie die Basiszustände, da der Gesamtdrehimpuls gute Quantenzahl bleibt.

Die noch unbestimmten Konstanten in Gl. (2.5), der Massenparameter B und die Steifheitsparameter C_2 - C_6 und D_6 können im Prinzip auf verschiedene Arten bestimmt werden: entweder aus mikroskopischen Rechnungen, oder durch direkte Anpassung an die experimentellen Niederenergieeigenschaften der Kerne, indem z. B. das Eigenspektrum von (2.5) und Uebergangsmatrixelemente an experimentelle Daten angepasst werden [33,34]. Zur Zeit ist mangels befriedigender mikroskopischer Modelle der erste Weg noch nicht gangbar, so dass versucht werden muss, aus dem Experiment etwas ueber die Struktur des Operators zu erfahren.

3. Die Potentialenergieflaeche

Der Hamiltonoperator aus Gl. (2.5) ist als Funktion der $\alpha_{2\mu}$ geschrieben, die die Kernoberflaeche im Laborsystem angeben. Da er aber gegen Drehungen des Kerns invariant ist, haengt er in Wirklichkeit nur von der Kerngestalt ab, wobei Kerngestalten als gleich gelten, die durch reine Drehungen ineinander uebergefuehrt werden koennen. Diese Abhaengigkeit ist aber in Gl. (2.5) und ueberhaupt bei einer Beschreibung durch die $\alpha_{2\mu}$ schwer zu erkennen, da gleiche Kerngestalten, die gegeneinander gedreht sind, durch verschiedene $\alpha_{2\mu}$ beschrieben werden.

Diese Vieldeutigkeit kann man beseitigen, wenn man zu einem Koordinatensystem uebergeht, das fest mit dem Kern gekoppelt ist, und eine feste Kerngestalt stets mit den gleichen Parametern kennzeichnet, und zwar ganz unabhaengig davon wie der Kern als Ganzes im Raum orientiert ist. Damit sollten die Drehungs- und Deformationsfreiheitsgrade des Kerns getrennt werden, und der Hamiltonoperator zerfaellt in zwei Teile, von denen einer nur die Drehungen beschreibt (er kann wegen der Rotationsinvarianz nur aus einem kinetischen Term bestehen), und einem von der Kerngestalt abhaengigen Anteil, der das Verhalten gegen Deformationen bestimmt.

Das "koerperfeste" oder "intrinsische" Koordinatensystem wird am guenstigsten so gewaehlt, dass seine Koordinatenachsen mit den Haupttraegheitsachsen des Kerns zusammenfallen. Um letztere zu bestimmen, drueckt man die sphaerischen Komponenten des irreduziblen Tensors $\alpha_{2\mu}$ durch die kartesischen aus

$$\begin{aligned}\alpha_{20} &= \sqrt{\frac{4\pi}{45}} (2\alpha_{zz} - \alpha_{xx} - \alpha_{yy}) \\ \alpha_{2\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3\pi}{15}} (\alpha_{xz} \pm i\alpha_{yz}) \\ \alpha_{2\pm 2} &= \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (\alpha_{xx} - \alpha_{yy} \pm 2i\alpha_{xy})\end{aligned}\quad (3.1)$$

Das System ist dann auf Hauptachsen transformiert, wenn die Deviationsmomente verschwinden, d. h. wenn $\alpha_{xy} = \alpha_{xz} = \alpha_{yz} = 0$ gilt. Nach Gl. (3.1) bleiben dann von den fuenf komplexen sphaerischen Komponenten $\alpha_{2\mu}$ noch zwei unabhaengige reelle Groessen uebrig, naemlich $a_0 = \alpha_{20}$ und $a_2 = \alpha_{22} = \alpha_{2,-2}$. Bohr und Mottelson [35,36] fuehrten eine Darstellung dieser Parameter in "Polarkoordinaten" ein, die durch

$$\begin{aligned} a_0 &= \beta \cos \gamma \\ a_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma \end{aligned} \quad (3.2)$$

definiert sind. Dabei bedeutet β eine prolate oder oblate Deformation, waehrend γ Abweichungen von der Axialsymmetrie angibt. $\gamma = 0$ entspricht einer axialsymmetrischen Kerngestalt.

Als Funktion von β und γ geschrieben erhaelt das Potential aus Gl. (2.5) die Form

$$\begin{aligned} V(\beta, \gamma) &= C_2 \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^2 - C_3 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{35}} \beta^3 \cos(3\gamma) + C_4 \frac{1}{5} \beta^4 \\ &- C_5 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{175}} \beta^5 \cos(3\gamma) + C_6 \frac{2}{35} \beta^6 \cos(3\gamma) \\ &+ D_6 \frac{1}{5\sqrt{5}} \beta^6. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wird das Potential in dieser Art im intrinsischen System geschrieben, so spricht man von der *kollektiven Potentialenergieflaeche*. Man kann die Potentialenergieflaeche als Funktion von a_0 und a_2 oder von β und γ etwa in Form von Hoehenlinien aufzeichnen und erhaelt dann ein anschauliches Bild des kollektiven Verhaltens des Kerns, das oft qualitativ auf die Niederenergieeigenschaften des Kerns zu schliessen gestattet. Dabei hat die Darstellung in β und γ den Vorteil, dass die Symmetrien der Flaeche klarer hervortreten.

Einige dynamische Eigenschaften des Kerns lassen sich direkt aus der Gestalt der Flaeche ablesen. So gibt etwa die Lage der Minima Aufschluss ueber die Deformation des Grundzustandes und etwaiger isomerer

Zustaende. Die Tiefe der isomeren Minima und die Breite der Barrieren, die sie vom Grundzustand trennen, spiegelt die Stabilitaet der Isomere wieder. Dabei entspricht einem Minimum am Ursprung bei $\beta = 0$ eine sphae-rische Kernform, einem Minimum auf der prolaten Achse bei $\gamma = 0$ eine zigarrenfoermige Kerngestalt, waehrend einem Minimum auf der oblaten Achse bei $\gamma = 60^\circ$ diskusfoermige Kerngestalten zugeordnet sind. Liegt ein Mini-mum dagegen zwischen der prolaten und der oblaten Achse, z. B. bei $\gamma = 30^\circ$, dann hat man es mit einem triaxialen Kern zu tun. Der Anstieg der Potenti-alenergieflaeche um die Minima schliesslich gibt Hinweise auf die Weich-heit des Kerns gegenueber β - und γ -Vibrationen.

Insgesamt koennen die statischen Potentialenergieflaechen allerdings nur ein grob qualitatives Bild vermitteln; quantitative Aussagen beduerfen einer vollen Beruecksichtigung der Dynamik.

In Fig. 1 sind Potentialenergieflaechen fuer einige idealisierte Nuklide dargestellt, an denen man anschaulich den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Kerntypen und den ihnen zugeordneten Potentialenergie-flaechen erkennen kann.

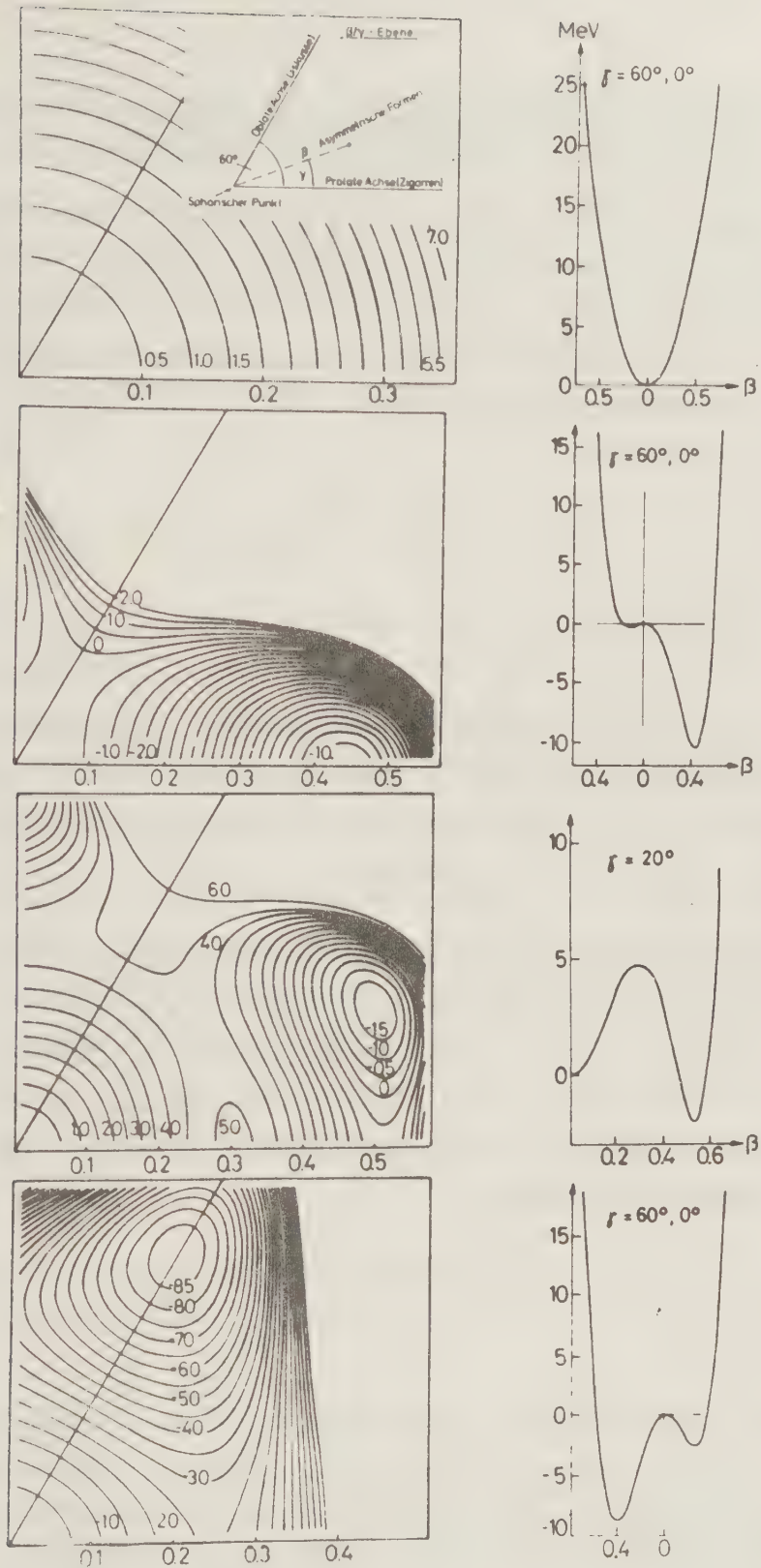


Fig. 1. Einige ausgewählte VKM-Potentialenergiefläachen, die (von oben nach unten) typisch fuer einen idealisierten harmonischen Vibrator, prolat deformierten Rotator, triaxialen Kern und oblat deformierten Rotator sind. Zur Veranschaulichung sind Schnitte durch die Fläachen hinzugefuegt.

4. Trennung der Protonen- und Neutronendeformationen

Zur Beschreibung der magnetischen Kerneigenschaften scheint es aus den in der Einleitung erwahnten Gruenden notwendig, die eine Quadrupoldeformationskoordinate $\alpha_{2\mu}$ des VKM durch zwei Koordinaten $\alpha_{2\mu}^p$ und $\alpha_{2\mu}^n$ zu ersetzen, die die Oberflaechen der Protonen- bzw. Neutronenverteilungen unabhaengig voneinander bestimmen :

$$R_p(\vartheta, \varphi) = R_0 \left(1 + Q_p + \sum_{\mu} \alpha_{2\mu}^p (-1)^{\mu} Y_{2-\mu} \right) \quad (4.1)$$

$$R_n(\vartheta, \varphi) = R_0 \left(1 + Q_n + \sum_{\mu} \alpha_{2\mu}^n (-1)^{\mu} Y_{2-\mu} \right) .$$

Die Faktoren Q_p und Q_n dienen zur Volumenerhaltung und werden, wie spaeter geschildert, numerisch bestimmt. R_0 wird fuer Protonen und Neutronen gleich gewaehlt und gibt den Kernradius bei sphaerischer Kernform an. Dabei ist $R_0 = 1.1 * A^{1/3}$ fm zu setzen.

Der Hamiltonoperator, der die Bewegung des durch die Koordinaten $\alpha_{2\mu}^p$ und $\alpha_{2\mu}^n$ beschriebenen Systems bestimmt, ist eine Funktion dieser Koordinaten und der kanonisch konjugierten Impulse $\pi_{2\mu}^p$ und $\pi_{2\mu}^n$. Man kann ihn rein formal aufteilen in einen Anteil, der nur von den Protonenfreiheitsgraden abhaengt, in einen reinen Neutronen-Anteil und schliesslich einen Wechselwirkungsterm :

$$H = H_p(\alpha^p, \pi^p) + H_n(\alpha^n, \pi^n) + H_{pn}(\alpha^p, \alpha^n, \pi^p, \pi^n) . \quad (4.2)$$

Diese Zerlegung ist allerdings recht unguenstig, da die eingangs erwahnte starke Kopplung der Protonen und Neutronen ueber die Symmetrieenergie nur geringe Abweichungen in der Deformation zulaesst, so dass stets $\alpha_{2\mu}^p \approx \alpha_{2\mu}^n$ gilt. Die Eigenfunktionen der beiden ersten Anteile in Gl. (4.2) ergeben also eine relativ schlechte Naecherung fuer das Gesamtsystem, da sie eine voellig unabhaengige Bewegung beider Teilchenarten beschreiben.

Ein wesentlich besserer Ansatz sollte sich ergeben, wenn man von $\alpha_{2\mu}^p$ und $\alpha_{2\mu}^n$ zu einer 'Schwerpunktskoordinate'

$$\alpha_{2\mu} = a \alpha_{2\mu}^r + b \alpha_{2\mu}^n \quad (4.3)$$

und einer 'Relativkoordinate'

$$\xi_{2\mu} = \alpha_{2\mu}^n - \alpha_{2\mu}^p \quad (4.4)$$

uebergeht. Die starke Kopplung zwischen $\alpha_{2\mu}^p$ und $\alpha_{2\mu}^n$ sollte dann in kleinen Schwingungen im ξ -Freiheitsgrad resultieren, so dass man hoffen kann, den groessten Teil der Kopplung in die Basisfunktionen zu uebernehmen und eine vergleichsweise schwache Restkopplung zwischen $\alpha_{2\mu}$ und $\xi_{2\mu}$ zu erhalten.

Die Konstanten a und b in der Definition (4.3) werden so gewaehlt, dass in der kinetischen Energie keine Kopplung zwischen $\pi_{2\mu}$ und $\pi_{2\mu}^\xi$ mehr auftritt. In den alten Koordinaten hat die kinetische Energie, deren Form aus dem VKM uebernommen wird, die Gestalt

$$T = P_p [\pi_p^2 \times \pi_p^2]^{[0]} + P_n [\pi_n^2 \times \pi_n^2]^{[0]} \quad (4.5)$$

mit $P_i = 5/4B_i$ fuer $i=p,n$. Ein Mischterm der Art

$$T' = P_{pn} [\pi_p^2 \times \pi_n^2]^{[0]} \quad (4.6)$$

taucht in guter Naeherung nicht auf, wie man sich mit Hilfe des mikroskopischen Cranking-Modells klarmachen kann. In der Cranking-Formel fuer den kollektiven Massenparameter

$$B_{pn} = 2\hbar^2 \sum_{j \neq 0} \frac{\langle 0 | \partial / \partial \alpha_p | j \rangle \langle j | \partial / \partial \alpha_n | 0 \rangle}{E_j - E_0} \quad (4.7)$$

läuft die Zwischensumme ueber alle Zustände des Vielteilchensystems, die man mit Hilfe der Operatoren $\partial/\partial\alpha_p$ und $\partial/\partial\alpha_n$ aus dem Grundzustand $|0\rangle$ erzeugen kann. Normalerweise kann wegen der geringen Paarkraftwechselwirkung zwischen Protonen und Neutronen bei schweren Kernen, die von der verschiedenen Lage der Fermikanten herruehrt, der Massenparameter fuer beide Teilchenarten getrennt berechnet werden [21]. In dieser Naeherung erzeugt aber z. B. fuer den Protonen-Massenparameter der Operator $\partial/\partial\alpha_p$ zwar einen angeregten Zustand, nicht jedoch der Operator $\partial/\partial\alpha_n$, der ja die Protonen ueberhaupt nicht beruehrt. In der Summe in Gl. (4.7) verschwindet also immer eines der beiden Matrixelemente und der Massenparameter wird in jedem Falle Null.

Die Transformation der kinetischen Energie auf die neuen Koordinaten laesst sich am einfachsten durchfuehren, wenn man beachtet, dass es sich dabei um eine kanonische Transformation im Sinne der klassischen Mechanik handelt. Bezeichnet man die zu $\alpha_{2\mu}$ und $\xi_{2\mu}$ kanonisch konjugierten Impulse mit $\pi_{2\mu}$ und $\pi_{2\mu}^\xi$, so hat die Erzeugende der Transformation die Form

$$F = \sum_{\mu} (a \alpha_{2\mu}^p + b \alpha_{2\mu}^n) \pi_{2\mu} + \sum_{\mu} (\alpha_{2\mu}^n - \alpha_{2\mu}^p) \pi_{2\mu}^\xi \quad (4.8)$$

In der ueblichen Bezeichnung fuer kanonische Transformationen werden die alten Koordinaten und Impulse mit (q_i, p_i) und die neuen mit (Q_i, P_i) bezeichnet. In dieser Konvention hat die Erzeugende die Form $F = F(q_i, p_i)$, und die Transformationsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\partial F}{\partial P_i} \\ P_i &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ K &= H + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Angewandt auf die Erzeugende (4.8), liefert der erste Satz von Gleichungen

einfach wieder die Definition von $\alpha_{2\mu}$ und $\xi_{2\mu}$, aber der zweite gibt die Beziehungen zwischen den alten und neuen Impulsen:

$$\pi_{2\mu}^P = a \pi_{2\mu} - \pi_{2\mu}^S, \quad \pi_{2\mu}^n = b \pi_{2\mu} + \pi_{2\mu}^S. \quad (4.10)$$

Loest man diese Gleichungen nach den neuen Impulsen auf, so erhaelt man

$$\pi_{2\mu} = \pi_{2\mu}^P + \pi_{2\mu}^n, \quad \pi_{2\mu}^S = a \pi_{2\mu}^n - b \pi_{2\mu}^P. \quad (4.11)$$

Gemaess der dritten der Gleichungen von (4.9) wird die neue Hamiltonfunktion einfach durch Einsetzen der neuen Impulse und Koordinaten erhalten; da die hier betrachtete Transformation die Koordinaten und Impulse nicht mischt, koennen kinetischer und potentieller Anteil gesondert behandelt werden. Fuer die kinetische Energie ergibt sich

$$T = (P_P a^2 + P_n b^2) [\pi_x^2 + \pi_y^2]^{[0]} + (2b P_n - 2a P_P) [\pi_x^2 \times \pi_y^2]^{[0]} + (P_b + P_n) [\pi_z^2 \times \pi_z^2]^{[0]}. \quad (4.12)$$

Der Mischterm verschwindet, wenn a und b die Beziehungen

$$b P_n = a P_P, \quad P_i = \frac{4}{B_i}, \quad i = n, P \quad (4.13)$$

und, per definitionem, $a+b=1$ erfuellen. Daraus folgt

$$a = \frac{P_n}{P_n + P_P} = \frac{B_P}{B_n + B_P}, \quad b = \frac{P_P}{P_n + P_P} = \frac{B_n}{B_P + B_n}, \quad (4.14)$$

so dass die Definition der Normalkoordinaten α und ξ endgueltig lautet

$$\alpha_{2\mu} = \frac{1}{B} (B_p \alpha_{2\mu}^p + B_n \alpha_{2\mu}^n), \quad (4.15)$$

$$\xi_{2\mu} = \alpha_{2\mu}^n - \alpha_{2\mu}^p.$$

Die kinetische Energie wird damit zu

$$T = \frac{5}{4B} [\pi^2_x \pi^2_x]^{rot} + \frac{5}{4B_z} [\pi^2_y \pi^2_y]^{rot}, \quad (4.16)$$

worin zur Abkuerzung

$$B = B_p + B_n, \quad B_z = \frac{B_n B_p}{B_n + B_p} \quad (4.17)$$

eingefuehrt wurden. B hat genau die Form der ueblichen reduzierten Masse, und ueberhaupt ist die hier durchgefuehrte Transformation voellig analog der Transformation auf Schwerpunkt- und Relativkoordinaten im Zweikoerperproblem. In diesem Sinne sind die Bezeichnungen **Schwerpunktskoordinate** fuer $\alpha_{2\mu}$ und **Relativkoordinate** fuer $\xi_{2\mu}$ zu verstehen.

Nach der Transformation auf die Koordinaten $\alpha_{2\mu}$ und $\xi_{2\mu}$ nimmt der Hamiltonoperator nun folgende Gestalt an :

$$\begin{aligned} H &= T(\alpha_{2\mu}, \pi_{2\mu}) + T(\xi_{2\mu}, \pi_{2\mu}^\xi) \\ &+ V(\alpha_{2\mu}) + V(\xi_{2\mu}) \\ &+ V(\alpha_{2\mu}, \xi_{2\mu}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Diese allgemeine Form des Hamiltonoperators liegt dem in dieser Arbeit entwickelten Modell zu Grunde.

5. Drehimpulse und Rotationsinvarianz

Einer Kollektivkoordinate, die bezueglich ihrer Transformation unter raeumlichen Drehungen ein irreduzibler sphaerischer Tensor mindestens von erstem Rang ist, kann man einen Drehimpulsoperator zuordnen, indem man die Koordinate mit ihrem kanonisch konjugierten Impuls zu einem resultierenden Drehimpuls 1 zusammenkoppelt [37].

$$\vec{J}^{[1]} = m [\alpha^2 \times \pi^2]^{[1]}, \quad m = i\sqrt{10} \quad (5.1)$$

Dieser Operator ist wirklich der physikalische Drehimpulsoperator fuer diese Koordinate, da er infinitesimale Drehungen erzeugt. Quantisiert man das System nach den ueblichen Vertauschungsregeln

$$[\alpha_{2\mu}, \pi_{2\mu'}] = i\hbar \delta_{\mu\mu'}, \quad (5.2)$$

dann erfuehlt der nach Gl. (5.1) konstruierte Operator auch tatsaechlich die fuer den Drehimpuls charakteristischen Vertauschungsregeln

$$[J^2, J_{11}] = 0$$

$$[J_{10}, J_{11}] = \hbar J_{11} \quad (5.3)$$

$$[J_{11}, J_{1-1}] = -\hbar J_{10}.$$

In dem hier beschriebenen Modell gibt es die zwei Freiheitsgrade $\alpha_{2\mu}$ und $\xi_{2\mu}$ bzw. $\alpha_{2\mu}^p$ und $\alpha_{2\mu}^n$ (es wird im folgenden immer davon abgesehen, dass jeder der beiden Tensoren aus fuef Komponenten besteht, die an sich jede einen Freiheitsgrad des Systems darstellen; physikalisch interessant ist nur die Gegenueberstellung dieser wesentlich verschiedenen Groessen wie z. B. α und ξ). In der (α_p, α_n) -Darstellung hat man somit die beiden Drehimpulsoperatoren

$$J_p^{(1)} = m [\alpha_p^2 \times \pi_p^2]^{(1)}$$

$$J_n^{(1)} = m [\alpha_n^2 \times \pi_n^2]^{(1)}, \quad (5.4)$$

deren erster den Drehimpuls der Bewegung der Protonenverteilung angibt, waehrend der zweite den der Neutronen beschreibt. J_p erzeugt infinitesimale Rotationen der Protonen und J_n bewirkt das gleiche fuer die Neutronen. Man sieht sofort, dass J_p und J_n keine guten Quantenzahlen mehr ergeben koennen, wenn die Kopplung zwischen Protonen und Neutronen beruecksichtigt wird. Dreht man naemlich die Protonen unter Festhaltung der Neutronen, d. h. wendet man den Operator J_p an, so aendert sich i. a. der Ueberlapp der Massenverteilungen und damit auch die Symmetrieenergie, also das Wechselwirkungspotential. Der Hamiltonoperator wird also nicht gegen eine Drehung der Protonen oder Neutronen allein invariant sein, sondern nur gegen eine gemeinsame Drehung beider Systeme.

Eine solche gemeinsame Drehung wird durch den Operator des Gesamtdrehimpulses

$$J^{(1)} = J_p^{(1)} + J_n^{(1)} \quad (5.5)$$

beschrieben.

Wie verhalten sich nun alle diese Operatoren beim Uebergang zur (α, ξ) -Darstellung? Da es sich dabei um eine kanonische Transformation handelt, erfuellen auch die neuen Koordinaten und Impulse die (5.2) entsprechenden Vertauschungsregeln

$$\begin{aligned} [\alpha_{2\mu}, \pi_{2\mu'}] &= 2\hbar \delta_{\mu\mu'} & [\xi_{2\mu}, \pi_{2\mu'}] &= 0 \\ [\xi_{2\mu}, \pi_{2\mu'}] &= 2\hbar \delta_{\mu\mu'} & [\alpha_{2\mu}, \pi_{2\mu'}] &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Folglich koennen auch die Drehimpulsoperatoren gemaess (5.1) gebildet werden :

$$J_{\alpha}^{[1]} = m [\alpha^2 \times \pi^2]^{[1]}, \quad J_{\xi}^{[1]} = m [\xi^2 \times \pi_{\xi}^2]^{[1]}. \quad (5.7)$$

Wichtig fuer spaetere Rechnungen ist die Beziehung zwischen den beiden Saetzen von Drehimpulsen. Im einzelnen hat man nach Gl. (4.10) und (4.11)

$$J_r^{[1]} = m \left\{ \frac{B_p}{B} [\alpha^2 \times \pi^2]^{[1]} - [\alpha^2 \times \pi_{\xi}^2]^{[1]} - \frac{B_n B_p}{B^2} [\xi^2 \times \pi^2]^{[1]} + \frac{B_n}{B} [\xi^2 \times \pi_{\xi}^2]^{[1]} \right\} \quad (5.8)$$

$$J_n^{[1]} = m \left\{ \frac{B_n}{B} [\alpha^2 \times \pi^2]^{[1]} + [\alpha^2 \times \pi_{\xi}^2]^{[1]} + \frac{B_n B_p}{B^2} [\xi^2 \times \pi^2]^{[1]} + \frac{B_p}{B} [\xi^2 \times \pi_{\xi}^2]^{[1]} \right\},$$

und mit diesem Ergebnis laesst sich leicht nachpruefen, dass der Operator des Gesamtdrehimpulses (5.5) jetzt durch

$$J^{[1]} = J_{\alpha}^{[1]} + J_{\xi}^{[1]} \quad (5.9)$$

gegeben ist.

Der Hamiltonoperator aus Gl. (4.18) soll unter einer Drehung des Gesamtsystems invariant sein, d. h. er soll mit dem Operator (5.9) vertauschen,

$$[J, H] = 0. \quad (5.10)$$

Daraus folgt fuer die einzelnen Bestandteile des Hamiltonoperators

$$[J_{\xi}, V(\xi_{2\mu})] = [J_{\alpha}, V(\alpha_{2\mu})] = [J, V(\alpha_{2\mu}, \xi_{2\mu})] = 0. \quad (5.11)$$

Alle diese Forderungen lassen sich erfuellen, wenn man die Potentiale explizit als zum Drehimpuls Null gekoppelte Kombinationen der $\alpha_{2\mu}$ und $\xi_{2\mu}$ konstruiert. Dagegen vertauscht ein dieser Weise angesetztes Wechselwirkungspotential i. a. nicht mehr mit den Drehimpulsen J_{α} und J_{ξ} einzeln, da es nur gegen gemeinsame Drehungen von $\alpha_{2\mu}$ und $\xi_{2\mu}$ invariant ist. Die Drehimpulse J_{α} und J_{ξ} ergeben also genausowenig wie J_p und J_n gute Quantenzahlen fuer das Gesamtsystem.

6. Die Symmetrieenergie

In der einfachsten Form taucht eine Symmetrieenergie schon in der Massenformel von Bethe und Weizsaecker auf. In dieser summarischen, von der Form des Kerns unabhaengigen Gestalt lautet sie

$$E_s = \kappa \frac{(Z - N)^2}{A}, \quad (6.1)$$

mit $\kappa \approx 20$ MeV. Es liegt nahe, diese Formel auf den Fall beliebiger Protonen- und Neutronendichten zu verallgemeinern, was unmittelbar zu

$$E_s = \kappa \int \frac{(\rho_p - \rho_n)^2}{\rho_p + \rho_n} d\tau \quad (6.2)$$

fuehrt. Hierin treten direkt die raeumlichen Dichten ρ_p und ρ_n auf.

Gl. (6.1) erhaelt man als Spezialfall, wenn ueberall im Raum $\rho_p = Z/A \cdot \rho_n$ gilt.

Physikalisch bedeutet Gl. (6.2) eine starke Kopplung zwischen den Protonen- und Neutronenverteilungen, die auf einen moeglichst grossen Ueberlapp der Dichten hinwirkt.

Das in Abschnitt 4 eingefuehrte Modell nimmt nun - wie sich im VKM und anderen Kollektivmodellen bewaehrt hat - konstante Dichten, aber als Neuerung verschiedene Oberflaechen fuer Protonen und Neutronen an. Der Ueberlapp ist offensichtlich dann am groessten, wenn $\alpha_{2\mu}^p = \alpha_{2\mu}^n$, d. h. $\xi_{2\mu} = 0$ ist. In diesem Fall wird die Symmetrieenergie unabhaengig von $\alpha_{2\mu}$ zu

$$E_s = \kappa \int \frac{Z/N - 1}{Z/N + 1} \frac{1}{\rho_n} d\tau = \kappa \frac{(N - Z)^2}{A}, \quad (6.3)$$

Fuer $\xi_{2\mu} \neq 0$ ergibt sich ein groesserer Wert, so dass ein bindendes Poten-

tial mit Minimum bei $\xi_{2\mu} = 0$ resultiert. Dieses bindende Potential ist ein wesentlicher Bestandteil des Hamiltonoperators. Um es mit den aus dem VKM uebernommenen mathematischen Methoden behandeln zu koennen, wird es in eine Potenzreihe in $\alpha_{2\mu}$ und $\xi_{2\mu}$ entwickelt :

$$\begin{aligned}
 E_s(\alpha, \xi) &= E_s(\alpha, \xi=0) \\
 &= C_\xi [\xi^2 \times \xi^2]^{[0]} \\
 &+ S_1 [[\xi^2 \times \xi^2]^2 \times \alpha^2]^{[0]} \\
 &+ S_J \sum_{J=0,2,4} [\xi^2 \times \xi^2]^{[J]} \times [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[J]} \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Die einzelnen Terme muessen wegen der Forderung nach Drehinvarianz des gesamten Hamiltonoperators zum Drehimpuls Null gekoppelt sein. Die Auswahl der Terme in Gl. (6.4) ist durch einige Bedingungen motiviert : Zum ersten duerfen keine Terme auftreten, die nur von $\alpha_{2\mu}$ abhaengen, da fuer $\xi_{2\mu} = 0$ das Potential unabhaengig von $\alpha_{2\mu}$ verschwinden soll. Hingegen duerfen Terme, die nur von $\xi_{2\mu}$ abhaengen, sehr wohl auftreten. Sie beschreiben den Teil der Symmetrieenergie, der unabhaengig von der gemeinsamen Deformation $\alpha_{2\mu}$ ist. Wie sich spaeter erweisen wird, ist das bei weitem der dominierende Anteil, waehrend die gemischten Terme nur eine kleine Variation des im wesentlichen parabolischen Bindungspotentials mit der Deformation beschreiben.

Eine weitere wichtige Einschraenkung besteht darin, dass keine Terme mit einer ungeraden Anzahl von ξ 's auftreten duerfen. Das liegt daran, dass die Symmetrieenergie (6.2) invariant gegen eine Vertauschung der Protonen- und Neutronendeformationen ist, was sich mathematisch als Invarianz gegen die Substitution $\xi_{2\mu} \rightarrow -\xi_{2\mu}$ formulieren laesst. Demnach muss auch das Wechselwirkungspotential (6.4) gegen diese Substitution invariant sein, so dass Terme ungerader Ordnung in ξ nicht erlaubt sind.

Während also die Symmetrieenergie Terme ungerader Ordnung in ξ nicht enthaelt, sind diese aber andererseits sehr wichtig zur Beschreibung solcher physikalischer Effekte, die unterschiedlich auf Protonen und Neutronen einwirken. Ein solcher Effekt ist z. B. die Paarkraft, die nach dem in der Einleitung gesagten wesentlich fuer das unterschiedliche Verhalten der Protonen und Neutronen bei der kollektiven Bewegung verantwortlich ist. Ein entsprechender Ansatz fuer ein kollektives 'Paarkraftpotential' wird im naechsten Abschnitt gegeben.

Um einen Ueberblick ueber die Wichtigkeit der einzelnen Terme in Gl. (6.4) und die Guete der Entwicklung bis zu einer bestimmten Ordnung zu erhalten, wurde versucht, mit einem geeigneten Ansatz fuer die Dichten ρ_p und ρ_n das Symmetrieintegral (6.2) fuer eine grosse Anzahl von Werten der Variablen $\alpha_{2\mu}$ und $\xi_{2\mu}$ auszuwerten und die Koeffizienten in Gl. (6.4) mit einem Least-Square-Fit-Verfahren anzupassen. Insbesondere sollte aus einem Vergleich der Groessen der einzelnen Terme festgestellt werden, ob u. U. schon eine Naeherung harmonischer Schwingungen in ξ ausreichend ist.

Das Integral (6.2) ist schon im Fall konstanter Dichten, aber nichtverschwindenden ξ 's zu kompliziert, um analytisch ausgewertet zu werden. Das liegt daran, dass die Integrationsgebiete durch die Ueberlappregion und die freistehenden Kappen zweier Quadrupolformen gebildet sind. Die geometrische Situation ist in Fig. 2 angedeutet. Wegen dieser komplizierten Integrationsbereiche musste die Integration numerisch durchgefuehrt werden. Da es sich u um ein Dreifachintegral handelt, werden allerdings sehr viele Stuetzstellen benoetigt, um eine ausreichende Genauigkeit zu erreichen. Zu viele Stuetzstellen fuehren aber andererseits zu einem starken Anwachsen der Rundungsfehler, so dass ihre Zahl auch nach oben begrenzt ist. Praktisch konnte mit einem Gauss-

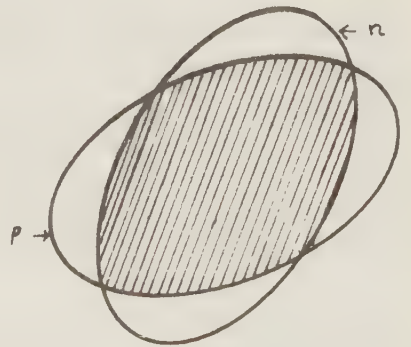


Fig. 2. Allgemeine Kerngestalt bei nichtverschwindender (hier zur Deutlichkeit uebergrosser) ξ -Deformation.

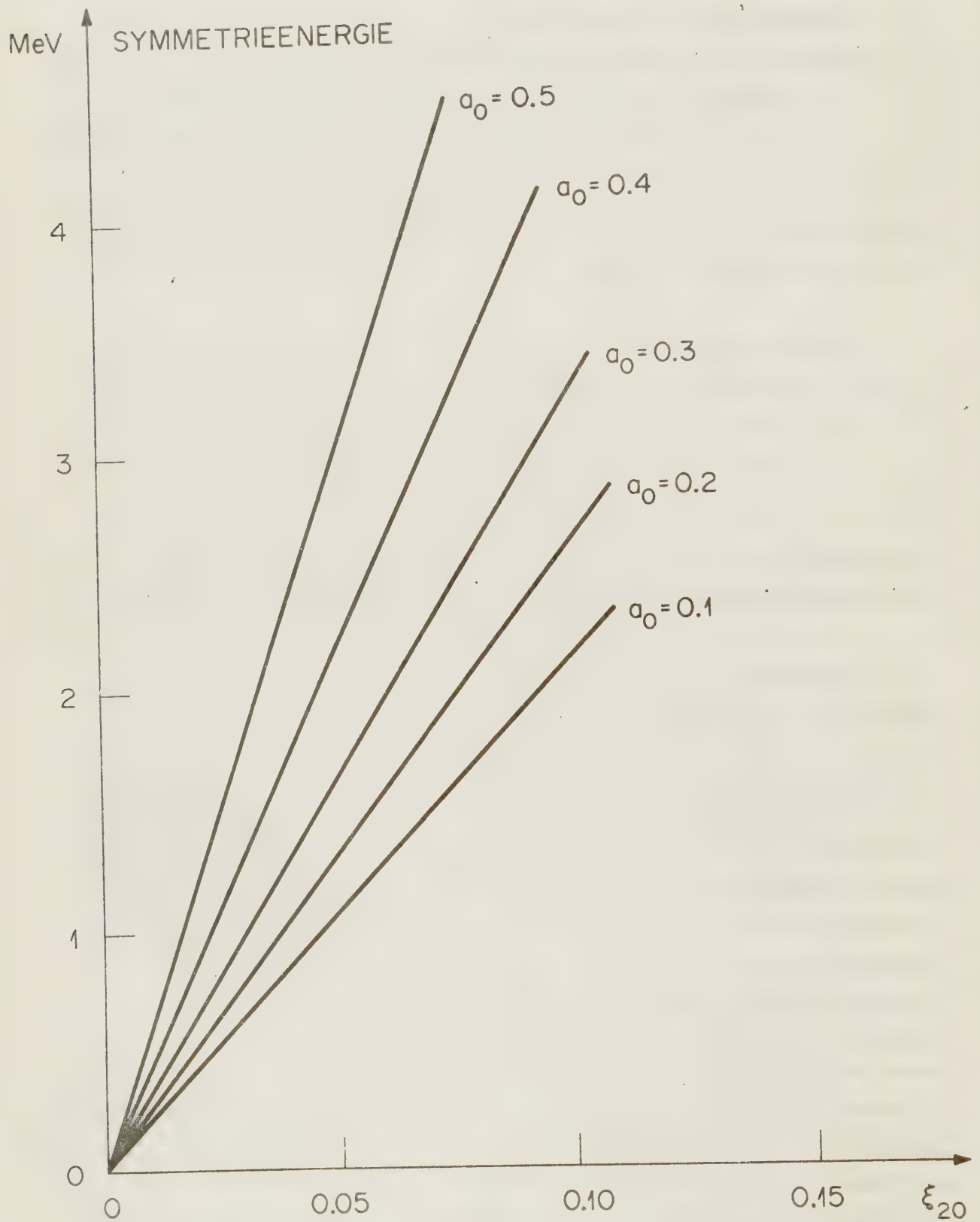


Fig. 3. Symmetrieenergie als Funktion von ξ_{20} bei verschiedenen a_0 -Werten unter der Annahme scharfer Oberflaechen der Protonen- und Neutronendichten.

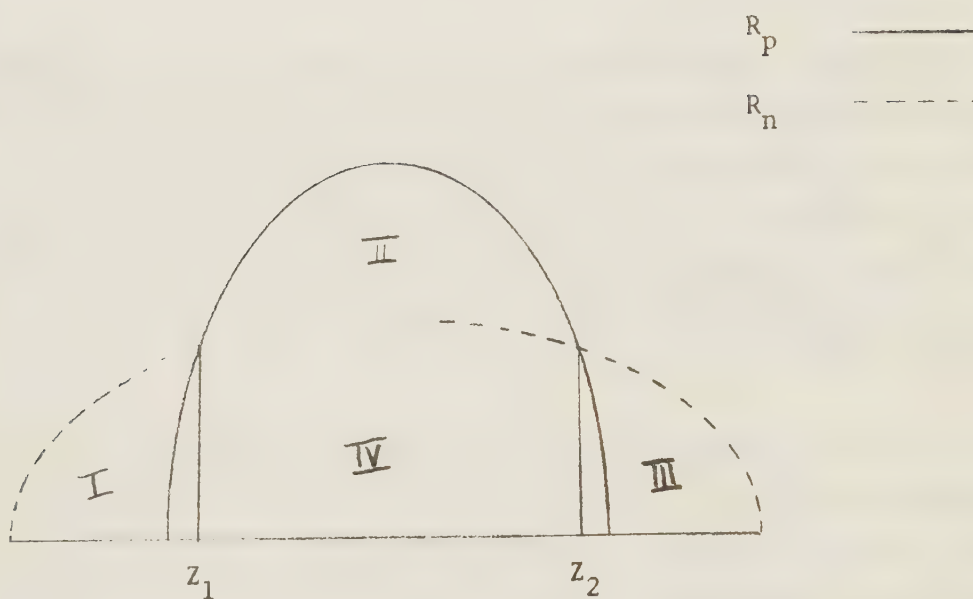
Verfahren und einer Stuetzstellenzahl von $30 \times 30 \times 30$ eine Genauigkeit von 0.1 MeV erreicht werden, die fuer diesen Zweck voellig ausreichte. Wegen des grossen Rechenzeitbedarfs konnte jedoch nur eine relativ geringe Anzahl von Werten berechnet werden.

Das Ergebnis dieser Rechnung mit konstanter Dichte und scharfem Kernrand ist in Fig. 3 dargestellt, und zwar ist die Symmetrieenergie als Funktion von α_{20} aufgetragen. Physikalisch entspricht diese Situation, in der nur α_{20} geaendert wird, zwei rotationssymmetrischen Kernen, die mit den Haupttraegheitsachsen aufeinanderliegen, waehrend sich die Laenge dieser Achsen gegeneinander aendert. Es handelt sich also um eine reine Deformationsaenderung ohne Relativdrehung.

Das in Fig. 3 aufgetragene Ergebnis zeigt ein ueberraschendes und unerwuensches Verhalten : das Potential steigt nicht mit α_{20}^2 , sondern mit $|\alpha_{20}|$ an, so dass sich ein Knick bei $\alpha_{20}=0$ ergibt. Da nicht klar ist, inwieweit dieses Verhalten physikalisch sinnvoll und nicht etwa durch die Unzulaenglichkeiten der Modellrechnung wie konstanten Dichten und scharfer Oberflaeche erzeugt ist, schien es unumgaenglich, die Gruende dafuer genauer zu untersuchen.

Das Resultat dieser Untersuchungen ist, dass dieser Knick in der Symmetrieenergie nicht physikalisch begruendet ist, sondern allein durch die Annahme einer scharfen Oberflaeche hervorgerufen wird. Die Definition Gl. (6.2) der Symmetrieenergie ist naemlich beim Uebergang von positiven auf negative α_{20} nicht glatt. Dies soll an einem eindimensionalen Analogon erlaeutert werden.

Fig. 4a zeigt ein flaechenhaftes System, das der dreidimensionalen Situation, wie sie bei der Berechnung von Fig. 3 zu Grunde lag, analog ist. Sei etwa angenommen, die Protonen naehmen die Flaeche unter der Kurve R_p und die Neutronen die unter der Kurve R_n ein. Der Integrand des Symmetrieenergieintegrals (6.2) ist dann in jedem der vier Bereiche I-IV konstant, so dass ihre Beitraege zum Integral durch die Flaeche bestimmt sind.



a



b



c

Fig. 4. Veranschaulichung der Unstetigkeit in der ersten Ableitung der Symmetrieenergie nach ξ_{20} . Erläuterungen s. Text.

Betrachten wir nun den Beitrag zum Integral, der von dem Gebiet IV herruehrt. Es ist dasjenige Gebiet, in dem Protonen und Neutronen uebereinander liegen. Sein Beitrag ist proportional zu

$$S = \int_{-\infty}^{z_1} R_p dz + \int_{z_1}^{z_2} R_n dz + \int_{z_2}^{\infty} R_p dz \quad (6.5)$$

Die Grenzen z_1 und z_2 sind in der Zeichnung angegeben, und es wurde ausserhalb der von ihnen begrenzten Flaechen R_p und R_n null gesetzt. In Fig. 4b ist derselbe Bereich noch einmal schraffiert hervorgehoben.

Angenommen, man laesst nun die Kurve R_p stetig in R_n uebergehen und umgekehrt R_n in das fruehere R_p . Das ist ein stetiger Vorgang, bei dem sich das Integral (6.5) voellig glatt verhalten sollte, und man sollte auch keinen Knick in der funktionalen Abhaengigkeit des Integrals von R_p und R_n bekommen. Als Endeffekt dieses Vorganges sind dann R_n und R_p vertauscht, was der Substitution $\xi_{2u} \rightarrow -\xi_{2u}$ im dreidimensionalen Fall entspricht. Vertauscht man aber in Gl. (6.5) unmittelbar R_p und R_n , dann geht das Integral ueber in

$$S = \int_{-\infty}^{z_1} R_n dz + \int_{z_1}^{z_2} R_p dz + \int_{z_2}^{\infty} R_n dz \quad (6.6)$$

Das ist ein Integral ueber das in Fig. 4c schraffierte Gebiet und damit keineswegs das erwartete Ergebnis. Um wieder das Integral ueber den Ueberlappbereich der Protonen und Neutronen zu erhalten, d. h. ueber die in Fig. 4b schraffierte Flaechen, muss man gleichzeitig die Grenzen der Integrale aendern, und genau diese Notwendigkeit erzeugt den Knick in der Symmetrieenergie als Funktion der Deformationen. Offenbar haengt aber dieses Problem daran, dass das Integral ueberhaupt nach der Art von Gl. (6.5) zerlegt werden kann, was nur unter Annahme scharfer Oberflaechen moeglich ist. Sind dagegen die Dichten stetig, so dass man keine Oberflaechen in diesem Sinne bekommt, so gibt es auch keinen Grund, warum die Symmetrieenergie nicht eine stetige Funktion der Deformation sein sollte.

Um diese Ueberlegungen nachzupruefen und gleichzeitig ein realistischeres Verhalten der Symmetrieenergie bei $\xi_{20} = 0$ zu erhalten, wurde das Integral (6.2) auch fuer nicht-konstante Dichten ausgewertet. Als Ansatz fuer die Dichten diente eine Fermi-Verteilung

$$\rho_i(r, \vartheta, \varphi, r_i) = \frac{\rho_{0i}}{1 + \exp((r - R_i(\vartheta, \varphi; \alpha_i))/b)} \quad i = n, p \quad (6.7)$$

mit verschiedenen Parametern α^p und α^n fuer Protonen und Neutronen. Die Groessen ρ_{0p} und ρ_{0n} werden numerisch aus der Forderung nach Massenerhaltung bestimmt, d. h. aus den Bedingungsgleichungen

$$\int \rho_p d\tau = Z \quad , \quad \int \rho_n d\tau = N \quad . \quad (6.8)$$

Beide haengen von den Parametern α^p bzw. α^n ab.

Die Integrale waren fuer diese variablen Dichten noch wesentlich aufwendiger zu berechnen, da jetzt nicht mehr der scharfe Kernrand die Grenze bildete, sondern so weit nach aussen integriert werden musste, bis die Dichten genuegend stark abgefallen waren. Auch hier fuehrte jedoch eine Gauss-Integration, wenn auch mit mehr Stuetzstellen, zu der gewuenschten Genauigkeit.

Das Ergebnis der Rechnungen mit diesen Dichten ist in Fig. 5 dargestellt. Tatsaechlich ist der Knick bei $\xi_{20}=0$ jetzt verschwunden. Damit ist auch anzunehmen, dass die Gruende fuer dieses unphysikalische Verhalten nun beseitigt sind, so dass das Verhalten der Symmetrieenergie bei geringen Auslenkungen nur mit realistischen Dichten hinreichend gut beschrieben werden kann.

Fuer den Least-Square-Fit wurden nun eine grosse Anzahl von Werten der Parameter α und ξ ausgewaehlt, fuer die die Symmetrieenergie gemass Gl. (6.2) berechnet wurde. Bezeichnet man ein Paar von Parametern (α_f, ξ_f)

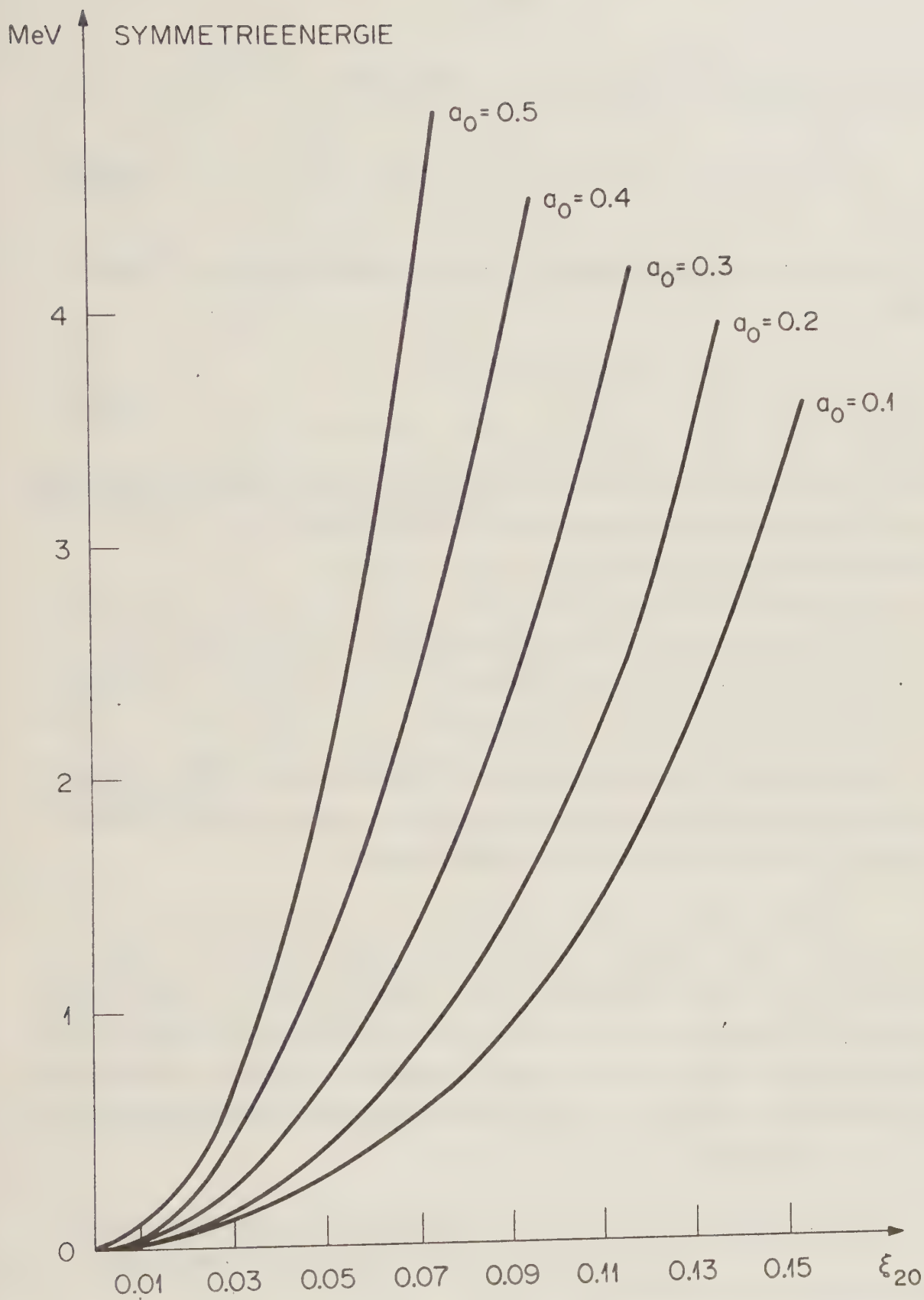


Fig. 5. Symmetrieenergie als Funktion von ξ_{20} fuer verschiedene a_0 -Werte unter der Annahme nicht-scharfer Oberflaechen.

zur Abkuerzung mit x_i und den Ausdruck (6.4) mit

$$f(x_i) = E_s(\alpha_i, \xi_i), \quad (6.9)$$

so ist die quadratische Abweichung zu den berechneten Werten y_i gegeben durch

$$\Delta = \sum_i (y_i - f(x_i))^2. \quad (6.10)$$

Dieser Ausdruck soll minimisiert werden. Dazu ist eine notwendige Bedingung, dass die partiellen Ableitungen nach den Koeffizienten aus Gl. (6.4) verschwinden :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial C_\xi} = 0 \quad \cdot \quad \frac{\partial \Delta}{\partial S_j} = 0 \quad j = 1, 0, 2, 4. \quad (6.11)$$

Das ist ein System linearer Gleichungen, das mit den ueblichen Verfahren geloest werden kann. Als Loesung erhaelt man die Werte der Koeffizienten C_ξ und S_j , die den Ausdruck (6.10) minimal machen.

Bei der Auswahl der Parameterpaare (α_i, ξ_i) , die in den Fit einbezogen wurden, wurde besonderer Wert auf die wichtigsten Freiheitsgrade des Systems gelegt, um eine vernuenftige Wahl treffen zu koennen. Dazu zaehlen zum einen die Drehungen der Protonen gegen die Neutronen ohne Aenderung der Deformationen der beiden Verteilungen, und zweitens die reinen Deformationsaenderungen bei Festhalten der Hauptachsen. Diese beiden Moeglichkeiten sind in Fig. 6 angedeutet.

Das Ergebnis des Fits mit α in der Naehة des Grundzustands eines stark deformierten Rotationskernes sei noch angegeben. Man erhaelt als optimale Potentialkoeffizienten (in MeV)

$$C_\xi = 2500, S_0 = 194.34, S_1 = -3697.35, S_2 = 587.23, S_4 = -4150.6.$$

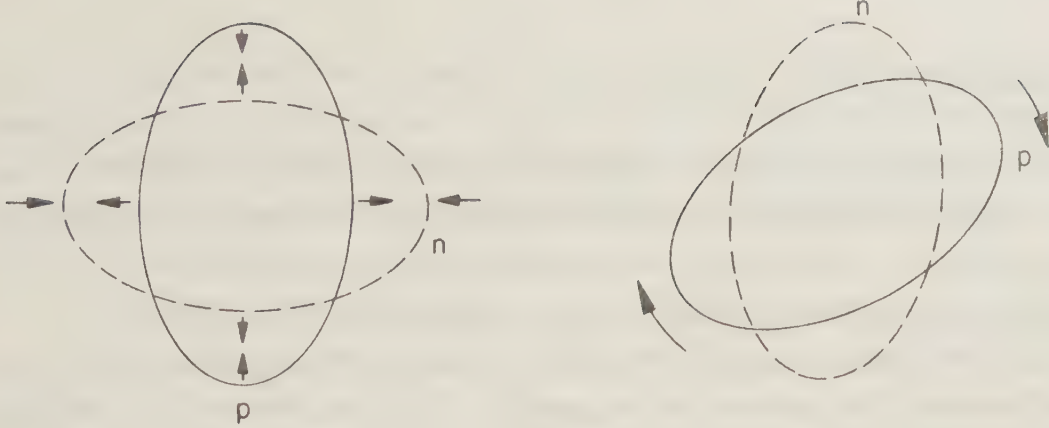


Fig. 6. Zwei verschiedene Möglichkeiten der ξ -Deformation. Links eine reine Drehung der Protonen gegen die Neutronen, rechts eine entgegengesetzte Änderung der β -Deformation.

Verwendet man diese Koeffizienten in dem Hamiltonoperator des gekoppelten Systems, dann zeigt sich bei der praktischen Rechnung, dass nur der harmonische Term mit dem Koeffizienten C_{ξ} wesentlich beiträgt, während alle anderen sich nicht bemerkbar machen. Dami ist das wesentliche Ergebnis dieses Fits, dass die Symmetrieenergie fuer die praktisch auftretenden ξ -Werte mit ausreichender Genauigkeit durch den harmonischen Term gegeben ist.

7. Die Paarkraft

Als wichtigster Anteil der Restwechselwirkung hat die Paarkraft wesentlichen Einfluss auf die Gestalt mikroskopisch berechneter Potentialenergieflaechen. In Modellen wie dem Quasispin-Modell [38] oder dem Pairing-plus-Quadrupole-Modell [39] tritt sie als eine Kraft auf, die sphaerische Kernformen herzustellen trachtet und in Wechselwirkung mit den deformierenden Einfluessen (hauptsaechlich Schaleneffekten) die Kerndeformation festlegt. Auch auf die kollektive Dynamik hat die Paarkraft wesentlichen Einfluss; so findet man etwa, dass das Kerntraegheitsmoment nach dem Cranking-Formalismus [21] in grossem Masse durch die BCS-Besetzungswahrscheinlichkeiten um die Fermikante bestimmt wird.

Wie eingangs erwaeht, findet man experimentell, dass die Staerke G_p der Paarkraftwechselwirkung zwischen den Protonen groesser ist als die analoge Paarkraftstaerke G_n unter den Neutronen. Die Paarkraft zwischen verschiedenen Nukleonen ist vernachlaessigbar [40]. Der Unterschied in den Paarkraftstaerken sollte zur Folge haben, dass die Grundzustandsdeformation der Protonenverteilung geringer wird als die der Neutronen. Dieser Effekt kann im Kollektivmodell durch unterschiedliche Grundzustandsdeformationen und damit verschiedene Deformationsenergieflaechen fuer Protonen und Neutronen beruecksichtigt werden, wodurch man auf die in Abschnitt 4 definierten Freiheitsgrade α und ξ gefuehrt wird.

Fuer die magnetischen Kerneigenschaften ist ausserdem von Bedeutung, wie sich die Traegheitsmomente Θ_p und Θ_n verhalten. Wie in der Einleitung gezeigt wurde, ist der Rotations-g-Faktor klassisch durch

$$g_R = \frac{\Theta_p}{\Theta_p + \Theta_n} \quad (7.1)$$

gegeben. Dieser Wert wird auch dann von Z/A verschieden sein, wenn die Traegheitsmomente ausser von der Kerngestalt auch von Paarkrafteinfluessen abhaengen, so dass sie nicht mehr einfach der Zahl der beteiligten Nukleonen proportional sind.

Ein Abweichen des Verhaeltnisses (7.1) von Z/A genuegt zwar, die Abweichungen der experimentellen g_R -Faktoren von diesem Wert zu erklaren, aber die M1-Uebergangswahrscheinlichkeiten verschwinden immer noch. Die Ursache dafuer wird weiter unten in Abschnitt 8 eroertert werden.

Es liegt nahe, anzunehmen, dass im Grundzustand auch bei verschiedenen Deformationen der Protonen und Neutronen die Hauptachsen der beiden Massenverteilungen immer noch aufeinander liegen werden. Dann entfaellt fuer den Grundzustand der in ξ enthaltene Rotationsfreiheitsgrad, so dass die Angabe von

$$a_0 = \frac{B_p a_{op} + B_n a_{on}}{B} \quad (7.2)$$

und des Deformationsunterschiedes

$$\xi_{20} = a_{on} - a_{op} \quad (7.3)$$

genuegt (von evtl. triaxialer Grundzustandsdeformation abgesehen).

Die Groessenordnung von ξ_{20} kann mit Hilfe des Quasispinmodells [41] abgeschaezt werden. In diesem Modell gilt naeherungsweise

$$\frac{a_{op}}{a_{on}} = \sqrt{\frac{G_n}{G_p}} \approx \sqrt{\frac{20}{30}} \quad (7.4)$$

Setzt man Gl. (7.4) in Gl. (7.3) ein und eliminiert a_{op} und a_{on} , so ergibt sich ein Naehierungswert fuer ξ_{20} :

$$\xi_{20} = \frac{B a_0 (1 - \sqrt{\frac{G_n}{G_p}})}{B_p \sqrt{\frac{G_n}{G_p}} + B_n} \quad (7.5)$$

Im Grenzfall $G_p = G_n$ wird $\xi_{20} = 0$, wie es sein sollte. Als Beispiel fuer die Groessenordnung von ξ_{20} in einem realistischen Fall seien die Daten

fuer den stark deformierten Kern ^{170}Er gegeben. In diesem Fall ist $a_0=0.325$ und damit wird $\xi_{20} = 0.064$, d. h. ca. ein Fuenftel der Grundzustandsdeformation.

Bisher wurde nur der Einfluss der Paarkraft auf die Deformation im Grundzustand untersucht. Es ist aber zu erwarten, dass die Paarkraft weit darueber hinausgehend das dynamische Verhalten des Kerns beeinflusst.

Offenbar kann die Paarkraft auf zwei verschiedene Arten die Dynamik des Kerns beeinflussen :

a) Sie bestimmt zum grossen Teil die kollektiven Massenparameter, so dass z. B. fuer die Traegheitsmomente nicht mehr $\Theta_p/\Theta_n = Z/A$ zu gelten braucht.

b) Sie veraendert die Potentialenergieflaechen selbst, was sich am deutlichsten in den verschiedenen Grundzustandsdeformationen der Protonen und Neutronen aeussert. Dieser Effekt koennte in der hier eingefuehrten (α, ξ) -Parametrisierung durch ein ξ -abhaengiges Zusatzpotential beschrieben werden. Das Verhaeltnis der Traegheitsmomente wird auch durch verschiedene Grundzustandsdeformationen beeinflusst, jedoch ist dies ein von a) verschiedener Effekt. Auch die "gemeinsame", α -abhaengige Potentialenergieflaeche wird durch die Paarkraft mitbestimmt, da dies aber durch die Anpassung der VKM-Potentialflaeche an das Experiment mitberuecksichtigt ist, braucht dieses Problem hier nicht mehr betrachtet zu werden.

Ein Ansatz fuer das kollektive "Paarkraftpotential" koennte ausser rein α -abhaengigen Termen im Prinzip alle zum Drehimpuls Null gekoppelten Kombinationen von α und ξ enthalten, wobei im Gegensatz zur Symmetrieenergie auch Terme ungerader Ordnung in ξ auftauchen duerfen. Man sollte sogar erwarten, dass gerade diese eine ausschlaggebende Rolle spielen, da sie Unterschiede zwischen Protonen und Neutronen beschreiben.

Ein naheliegender Ansatz fuer ein Paarkraftpotential, das einen Grundzustandsdeformations-Unterschied zwischen Protonen und Neutronen erzeugt, ist der eines rein ξ -abhaengigen Potentials mit deformiertem Minimum.

Wegen der Beziehung $\xi_{20} = a_{on} - a_{op}$ sollte dann ein statischer Deformationsunterschied zwischen Protonen und Neutronen resultieren. Dies ist jedoch nicht der Fall, da der Deformationsunterschied nicht an eine bestimmte Richtung gebunden ist. Dieses Problem wird in Abschnitt 9 eingehender behandelt.

Der kollektive Ansatz fuer ein Paarkraftpotential hat demnach die folgende Form :

$$\begin{aligned}
 E_p = & P_1 [\alpha^2 \times \xi^2]^{(0)} \\
 & + P_2 [(\alpha^2 \times \alpha^2)^2 \times \xi^2]^{(0)} \\
 & + P_3 [\alpha^2 \times \alpha^2]^{(0)} [\alpha^2 \times \xi^2]^{(0)} \\
 & + P_4 [(\alpha^2 \times \alpha^2)^0 [\alpha^2 \times \alpha^2]^2]^{(2)} \times \xi^2]^{(0)} \\
 & + P_5 [(\alpha^2 \times \alpha^2)^2 [\alpha^2 \times \alpha^2]^2]^{(2)} \times \xi^2]^{(0)} \\
 & + S_1 [\alpha^2 \times (\xi^2 \times \xi^2)]^{(0)} \\
 & + S_J [\alpha^2 \times \alpha^2]^J \times (\xi^2 \times \xi^2)^J \quad J=0,2,4 \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Leider ist es nicht so leicht moeglich, die Koeffizienten in Gl. (7.6) zu bestimmen, wie es fuer die Symmetrieenergie gelang. Mikroskopische Rechnungen waeren zwar denkbar, die daraus gewonnenen Potentiale lassen sich aber wegen ihrer komplizierten Struktur mit oszillierenden Schalen-effekten nurnoch schwer durch einen Potenzreihenansatz der Form (7.6) beschreiben. Damit ist natuerlich nicht gesagt, dass (7.6) nicht allgemein genug waere, denn dieser Ansatz soll ja nur die mittleren kollektiven Eigenschaften und nicht die detaillierten Einteilchenstrukturen wiedergeben.

Aus diesem Grund werden fuer die Konstanten in (7.6) keine Rechnungen durchgefuehrt, sondern sie werden als unbekannte Groessen stehen gelassen und durch Anpassung an das Experiment bestimmt.

Zu diesem Zweck ist es jedoch nicht noetig, alle Terme aus Gl. (7.6) mitzunehmen; es genuegt, diejenigen zu beruecksichtigen, die die physikalisch wichtigen Effekte verursachen, also grundsaeztlich verschieden von der Symmetrieenergie (6.4) sind. Damit bleibt

$$\begin{aligned}
 E_p = & P_1 [\alpha^2 \times \xi^2]^{[0]} \\
 & + P_2 [[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \xi^2]^{[0]} \\
 & + P_3 [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} [\alpha^2 \times \xi^2]^{[0]} \\
 & + P_4 [[[\alpha^2 \times \alpha^2]^0 [\alpha^2 \times \alpha^2]^2]^2 \times \xi^2]^{[0]} \\
 & + P_5 [[[\alpha \times \alpha^2]^2 [\alpha^2 \times \alpha^2]^2]^2 \times \xi^2]^{[0]} \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Die endgueltig in den Rechnungen beruecksichtigte Anzahl von Termen muss sich schliesslich nach der Anzahl der experimentellen Werte richten, da nur bei genuegenden Messwerten eine sinnvolle Bestimmung der Konstanten moeglich ist.

8. Der Hamiltonoperator und seine Diagonalisierung

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die einzelnen Bestandteile des Modell-Hamiltonoperators und ihre physikalische Bedeutung diskutiert. Der vollständige Operator in seiner allgemeinsten Form lautet

$$\begin{aligned}
 H = & P_0 [\pi^2 \times \pi^2]^{[00]} \\
 & + P_3 [\pi_3^2 \times \pi_3^2]^{[00]} \\
 & + C_2 [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[00]} \\
 & + C_3 \left[[\alpha^2 \times \alpha^2]^0 \times \alpha^2 \right]^{[00]} \\
 & + C_4 \left[[\alpha^2 \times \alpha^2]^{[00]} \right] \left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^{[00]} \\
 & + C_5 \left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^{[00]} \left[[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \alpha^2 \right]^{[00]} \\
 & + C_6 \left[[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \alpha^2 \right]^{[00]} \left[[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \alpha^2 \right]^{[00]} \\
 & + D_6 \left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^{[00]} \left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^{[00]} \left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^{[00]} \\
 & + C_5 [\xi^2 \times \xi^2]^{[00]} \\
 & + S_1 \left[[\xi^2 \times \xi^2]^2 \times \alpha^2 \right]^{[00]} \\
 & + S_J \sum_J \left[[\xi^2 \times \xi^2]^J \right] \left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^J \Big]^{[00]} \quad J = 0, 2, 4 \\
 & + P_1 \left[\alpha^2 \times \xi^2 \right]^{[00]} \\
 & + P_2 \left[[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \xi^2 \right]^{[00]} \\
 & + P_3 \left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^{[00]} \left[\alpha^2 \times \xi^2 \right]^{[00]} \\
 & + P_4 \left[[\alpha^2 \times \alpha^2]^0 \left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^2 \right] \times \xi^2 \Big]^{[00]} \\
 & + P_5 \left[[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^2 \right] \times \xi^2 \Big]^{[00]} .
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

Fuer praktische Rechnungen ist dieser Operator aber noch zu kompliziert und die Entwicklungen nach Potenzen von α und ξ muessen abgebrochen werden. Bis zu welcher Ordnung man gehen kann, muss an Hand der experimentellen Daten festgestellt werden. Hier soll nun schon mit Hilfe rein theoretischer Argumente die Zahl der Terme in Gl. (8.1) erheblich eingeschaenkt werden.

Bei den rein α -abhaengigen Termen ergibt sich dabei nichts neues; diese Terme im Potential sind ja schon im Rahmen des VKM getestet worden, wobei sich zeigte, dass die in (8.1) aufgefuehrten Terme notwendig und auch hinreichend allgemein sind. Deshalb werden sie in diesem Modell beibehalten.

Fuer die von der Symmetrieenergie (6.4) herruehrenden Terme sind die Kopplungskonstanten in Abschnitt 6 explizit ausgerechnet worden. Die Rechnungen sind dort zwar nur fuer einen Kern gemacht worden, duerften aber wegen der Unabhaengigkeit der Symmetrieenergie von Schaleneffekten sich bei anderen Kernen hoechstens geringfuegig aendern.

Um den Einfluss der hoeheren Terme in der Symmetrieenergie zu testen, wurde der Hamiltonoperator einmal mit und einmal ohne sie diagonalisiert. Das ergab eine Aenderung der Eigenwerte um weniger als 0.01 MeV, und zwar unabhaengig vom Vorhandensein des Paarkraftpotentials. Auch die Eigenvektoren aenderten sich nur aeusserst geringfuegig. Deshalb wurde nur der harmonische Term in der Symmetrieenergie beruecksichtigt.

Es sei hier noch einmal betont, dass dieses Ergebnis nicht aus dem Experiment stammt, sondern allein aus dem theoretischen Ansatz (6.2), der die Symmetrieenergie als Funktional der Dichten gibt.

Bei der Paarkraft ist die Situation etwas anders als bei der Symmetrieenergie. Da hier die Koeffizienten nicht aus tieferliegenden theoretischen Ansaetzen bestimmt werden konnten, muss man auf das Experiment zurueckgreifen. Deshalb kann die endgueltige Auswahl der Terme erst bei Vergleichen mit Messwerten erfolgen. Hier sollen jedoch schon einige Groessenordnungs-Ueberlegungen helfen, mit einer wesentlich kleineren

Zahl von Termen an das Experiment heranzugehen.

Das wichtigste Argument, das sich anbietet, ist die Kleinheit der ξ -Schwingungen. Aus der Arbeit von Faessler [22] ist bekannt, dass ihre Energie etwa bei 15 MeV liegen sollte, und dass ihre Amplitude sehr klein ist. Demnach wird im Kopplungspotential die Bedeutung der Terme mit hoeherer Zahl von ξ 's rasch zurueckgehen, und die wichtigsten Terme sollten die mit einem einzigen ξ sein. Die in ξ quadratischen Terme koennen zwar von derselben Ordnung wie der fuehrende Term der Symmetrieenergie sein, sie geben aber keine Unterschiede zwischen Protonen und Neutronen an, sondern nur eine Variation der ξ -Oszillationsfrequenz mit α . Deshalb ist es schwer, aus dem Experiment Aussagen ueber ihre Existenz bzw. Groessenordnung zu machen. Im folgenden werden demnach die physikalisch interessantesten Terme aus dem Paarkraftpotential, d. h. die erster Ordnung in ξ , betrachtet, waehrend alle Terme hoeherer Ordnung in ξ vernachlaessigt werden.

Von den somit verbliebenen Termen erster Ordnung in ξ wurden die folgenden in praktischen Rechnungen benutzt :

$$\begin{aligned}
 & \left[\alpha^2 \times \xi^2 \right]^{[0]}, \\
 & \left[\left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^2 \times \xi^2 \right]^{[0]}, \\
 & \left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^{[0]} \left[\alpha^2 \times \xi^2 \right]^{[0]}, \\
 & \left[\left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^0 \left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^2 \right] \times \xi^2 \right]^{[0]}, \\
 & \left[\left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^2 \left[\alpha^2 \times \alpha^2 \right]^2 \right] \times \xi^2 \right]^{[0]}.
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Dass hier fuer dritte Ordnung in α nur eine bzw. fuer vierte Ordnung nur zwei der moeglichen Kopplungen auftreten, laesst sich mit einem aehnlichen Argument zeigen, wie es in [37] fuer bestimmte Terme im α -Potential gegeben wurde. Beruecksichtigt man, dass $[\alpha \times \alpha]^J$ fuer ungerade J verschwindet, so

erhaelt man z. B. bei vier α die vier nichtverschwindenden Terme

$$\begin{aligned}
 & [\alpha^1 \times \alpha^2]^{[0]} \times [\alpha^1 \times \alpha^2]^{[2]} \\
 & [\alpha^2 \times \alpha^1]^{[2]} \times [\alpha^2 \times \alpha^1]^{[2]} \\
 & [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[2]} \times [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[4]} \\
 & [\alpha^1 \times \alpha^1]^{[4]} \times [\alpha^1 \times \alpha^1]^{[4]} ,
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

die noch mit ξ zum Drehimpuls Null gekoppelt werden. Benutzt man nun die Moeglichkeit, die Kopplungen mit Hilfe von 9-J-Symbolen zu vertauschen, dann ergibt sich [42]

$$\begin{aligned}
 & [[\alpha^1 \times \alpha^2]^{[2]} \times [\alpha^1 \times \alpha^1]^{[1]}]^{[2]} \\
 & = \sum_{J' I'} \langle (22) J, (22) I, 2 / (22) J', (22) I', 2 \rangle [[\alpha^2 \times \alpha^2]^{[2]} [\alpha^2 \times \alpha^1]^{[1]}]^{[2]} .
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Da als Konstituenten der Kopplungsausdruecke nur α 's auftreten, hat man es auf beiden Seiten mit Summen ueber dieselben Ausdruecke zu tun, d. h. man bekommt vier Beziehungen zwischen den vier Termen (8.3). Fuer die Anzahl linear unabhaengiger Gleichungen ist der Rang des Gleichungssystems massgebend. In diesem Fall findet man ihn durch Einsetzen der 9-J-Symbole (die allerdings mangels ausreichender Tafeln numerisch berechnet werden muessen), und das Ergebnis ist, dass zwei der Gleichungen (8.4) voneinander unabhaengig sind, d. h. damit auch, dass zwei Terme aus (8.3) genuegen, so z. B. die in (8.2) angefuehrten.

Fuer die Terme mit drei α 's kann man voellig analog mit Hilfe von 6-J-Symbolen zeigen, dass der in (8.2) angegebene Term der einzig noetige ist.

Unter Beruecksichtigung der in diesem Abschnitt besprochenen Vereinfachungen lautet nun der Modell-Hamiltonoperator

$$\begin{aligned}
 H = & P_\alpha [\pi^2 \times \pi^2]^{[0]} \\
 & + P_\beta [\pi_\beta^2 \times \pi_\beta^2]^{[0]} \\
 & + C_1 [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} \\
 & + C_3 \left[[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \alpha^2 \right]^{[0]} \\
 & + C_4 [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} \\
 & + C_5 [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} \left[[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \alpha^2 \right]^{[0]} \\
 & + C_6 \left[[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \alpha^2 \right]^{[0]} \left[[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \alpha^2 \right]^{[0]} \\
 & + D_6 [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} \\
 & + C_3 [\xi^2 \times \xi^2]^{[0]} \\
 & + P_1 [\alpha^2 \times \xi^2]^{[0]} \\
 & + P_2 \left[[\alpha^2 \times \alpha^2]^2 \times \xi^2 \right]^{[0]} \\
 & + P_3 [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} [\alpha^2 \times \xi^2]^{[0]} \\
 & + P_4 \left[[[\alpha^2 \times \alpha^2]^0 [\alpha^2 \times \alpha^2]^2]^2 \times \xi^2 \right]^{[0]} \\
 & + P_5 \left[[[\alpha^2 \times \alpha^2] [\alpha^2 \times \alpha^2]^2]^2 \times \xi^2 \right]^{[0]}
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

Zur praktischen Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren spaltet man ihn auf :

$$H = H_\alpha + H_\beta + V_{\alpha\beta} \tag{8.6}$$

Dabei ist H_α der Hamiltonoperator des VKM nach Gl. (2.5), H_ξ hat die Form eines einfachen harmonischen Oszillators

$$H = C_\xi [\xi^2 \times \xi^2]^{[0]} + P_\xi [\pi_\xi^2 \times \pi_\xi^2]^{[0]} \quad (8.7)$$

und das Kopplungspotential enthaelt alle uebrigen Terme.

Die Eigenvektoren von H_α und H_ξ formen gemeinsam eine Basis fuer die Diagonalisierung des Kopplungspotentials. Im Falle von H_ξ sind dies die Eigenvektoren des fuenfdimensionalen harmonischen Oszillators, also genau die Eigenvektoren, die auch im VKM als Basis dienen. Der Hamiltonoperator H_α dagegen beschreibt ein allgemeines VKM, so dass seine Eigenvektoren schon durch Diagonalisierung in der gleichen Basis gewonnen werden muessen. Der Vorteil dieser Vordiagonalisierung ist, dass man annehmen kann, dass das Kopplungspotential nur eine Stoerung darstellt, so dass die Eigenvektoren von H_α , gekoppelt mit denen von H_ξ , schon eine gute Naeherung fuer die Eigenvektoren des Gesamtsystems bilden. Wuerde man dagegen auch fuer α mit den Funktionen des harmonischen Oszillators arbeiten, so muesste ebenso wie im VKM eine sehr grosse Zahl von Basisfunktionen mitgenommen werden, um ueberhaupt erst einmal H_α befriedigend diagonalisieren zu koennen.

Da die Hamiltonoperatoren H_α und H_ξ mit den Drehimpulsoperatoren J_α und J_ξ vertauschen, kann man als Basisfunktionen solche auswahlen, die auch Eigenfunktionen des Drehimpulses sind (γ vertritt alle uebrigen Quantenzahlen) :

$$\begin{aligned} J_i^2 |J_i \gamma_i\rangle &= J_i(J_i+1) |J_i \gamma_i\rangle \\ J_{z_i} |J_i \gamma_i\rangle &= M_i |J_i \gamma_i\rangle \end{aligned} \quad i = \xi, \alpha \quad (8.8)$$

Der Gesamtdrehimpuls des Systems setzt sich additiv aus J_α und J_ξ zusammen, so dass Basisfunktionen fuer das Gesamtsystem durch Koppeln der Funktionen (8.8) zu gutem Gesamtdrehimpuls erhalten werden koennen :

$$|J, m, J_\alpha, J_\xi, \delta_\alpha, \delta_\xi\rangle = \sum_{m_\alpha m_\xi} (J_\alpha J_\xi J / m_\alpha m_\xi m) \cdot |J_\alpha \delta_\alpha\rangle |J_\xi \delta_\xi\rangle \quad (8.9)$$

Da der Hamiltonoperator (8.5) mit dem Operator des Gesamtdrehimpulses vertauscht, kann die Diagonalisierung fuer jeden Wert des Gesamtdrehimpulses getrennt durchgefuehrt werden. Ausserdem sind die Zustaende, die sich nur in der magnetischen Quantenzahl unterscheiden, entartet, so dass es genuegt, fuer einen einzigen Wert der magnetischen Quantenzahl zu rechnen. Praktisch geschieht das, indem einfach mit reduzierten Matrixelementen gerechnet wird.

Die Basisfunktionen fuer einen bestimmten Drehimpuls erhaelt man also als Menge aller nach (8.9) gebildeten Kombinationen mit gegebenem J.

Eine anschauliche Vorstellung von der Menge der Basiszustaende vermittelt Fig. 7. Die niedrigsten Zustaende werden durch das VKM-Spektrum des Kerns, gekoppelt mit dem Grundzustands- 0^+ -Zustand in ξ , gebildet. Ca. 15 MeV darueber liegen die Basiszustaende, die durch Kopplung des VKM-Spektrums mit dem 2^+ -Ein-Phononen-Zustand in ξ entstehen. Weiter oben bei 30 MeV usw. folgen dann die mit den hoeheren ξ -Zustaenden gekoppelten Spektren.

Physikalisch wuerde man erwarten, dass die durch den grossen Abstand von 15 MeV getrennten Zustaende der ersten ξ -angeregten Bande nur schwach beigemischt sind, wobei aber diese Beimischungen allein die magnetischen Kerneigenschaften erklaren sollten. Hier wird auch deutlich, warum nur lineare Terme in ξ mitgenommen wurden: bilineare Terme z. B. wuerden die Zwei-Phononen-Zustaende bei 30 MeV beimischen, was noch ein weit staerkeres Kopplungspotential erfordern wuerde.

Andererseits laesst diese spezielle Struktur des Basis-Spektrums es wahrscheinlich erscheinen, dass das Kopplungspotential mit stoerungstheore-

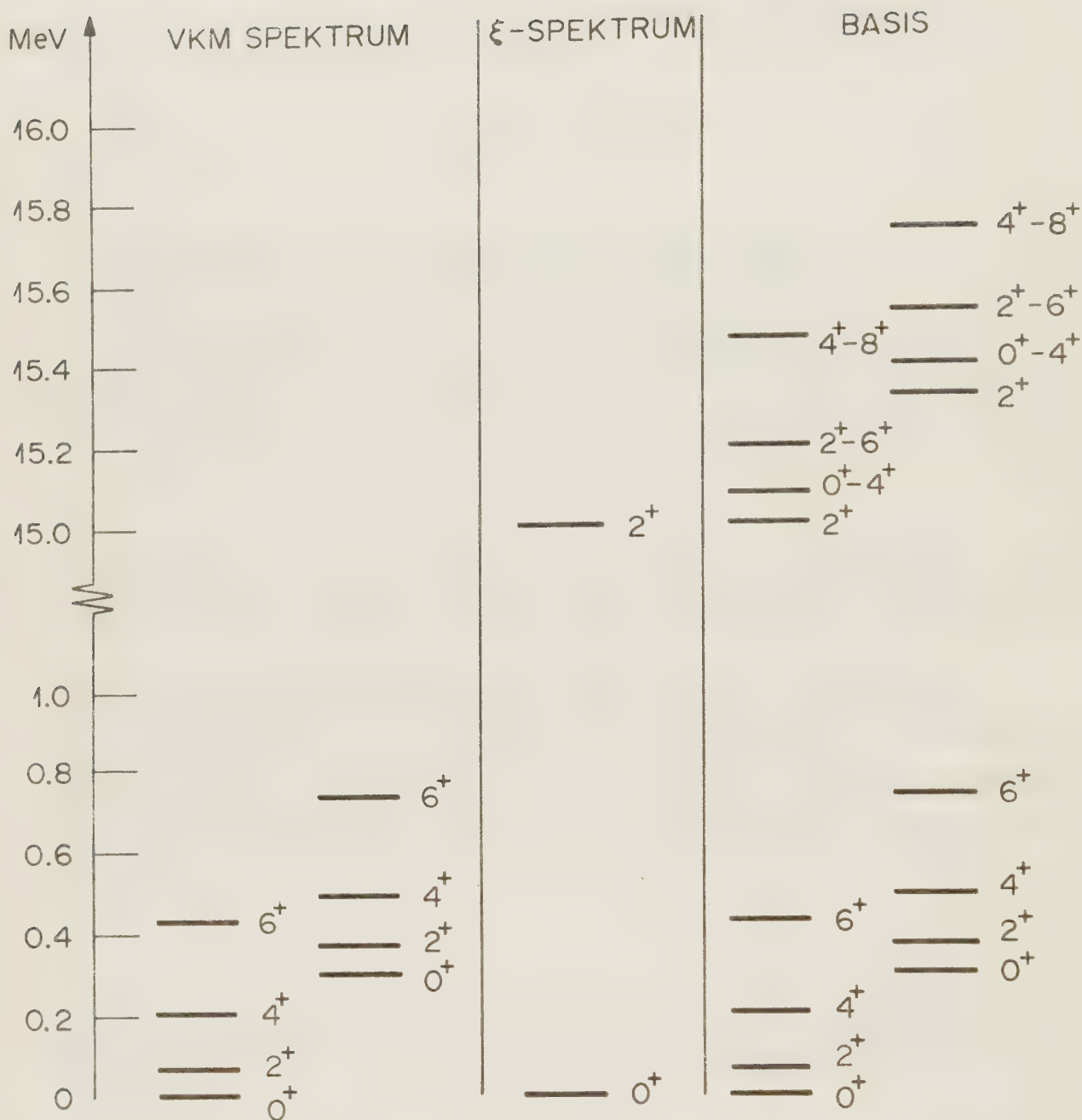


Fig. 7. Aus dem VKM-Niederenergiespektrum (links) und den ξ -Oszillatorzuständen (Mitte) erhält man durch Koppeln zu gutem Gesamtdrehimpuls das Gesamtspektrum (rechts), das noch die Schalenstruktur des ξ -Spektrums zeigt.

tischen Methoden behandelt werden kann. Auf diese Möglichkeit wird unten weiter eingegangen werden.

Die Matrixelemente des Kopplungspotentials koennen durch Zerlegen in α - und ξ -Matrixelemente berechnet werden. Die entsprechenden Formeln lauten [42] :

$$\begin{aligned}
 V_Q^K &= \sum_{q_1, q_2} \langle K, K_2, K | q_1, q_2, Q \rangle T_{q_1}^{K_1} U_{q_2}^{K_2} \\
 \langle \gamma, \gamma_2, \ell, \ell_2, e \| V^K \| \gamma', \gamma'_2, \ell', \ell'_2, e' \rangle &= \sqrt{(2\ell+1)(2K+1)(2\ell'+1)} \\
 &\quad \times \left\{ \begin{matrix} \ell' & \ell'_2 & \ell' \\ K_1 & K_2 & K \\ \ell' & \ell'_2 & e' \end{matrix} \right\} \langle \gamma, \ell \| T^{K_1} \| \gamma', \ell' \rangle \langle \gamma_2, \ell_2 \| U^{K_2} \| \gamma'_2, \ell'_2 \rangle \\
 \underbrace{U=1 \quad K_1=K_2=K}_{T=1 \quad K_1=K_2=K} & \\
 \langle \gamma, \gamma_2, \ell, \ell_2, e \| T^K \| \gamma', \gamma'_2, \ell', \ell'_2, e' \rangle &= \delta_{\gamma, \gamma'} \delta_{\ell_2, \ell'_2} \langle \gamma, \ell \| T^K \| \gamma', \ell' \rangle \quad (8.10) \\
 &\quad \times (-)^{\ell'+\ell_2+e+K} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \left\{ \begin{matrix} \ell, K & \ell' \\ \ell' & \ell_2 & e \end{matrix} \right\} \\
 \langle \gamma, \gamma_2, \ell, \ell_2, e \| U^K \| \gamma', \gamma'_2, \ell', \ell'_2, e' \rangle &= \delta_{\gamma, \gamma'} \delta_{\ell, \ell'} \langle \gamma_2, \ell_2 \| U^K \| \gamma'_2, \ell'_2 \rangle \\
 &\quad \times (-)^{\ell+\ell_2+\ell'_2+K} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \left\{ \begin{matrix} \ell, K & \ell' \\ \ell' & \ell_2 & e \end{matrix} \right\}
 \end{aligned}$$

Die dann noch uebrigbleibenden Matrixelemente der α - bzw. ξ -Terme koennen ebenso wie im VKM gruppentheoretisch ausgewertet werden.

9. Der Operator des magnetischen Moments

In einem gg-Kern addieren sich im Grundzustand die magnetischen Momente der Spins der Nukleonen zu Null zusammen, so dass man annehmen kann, dass in den tiefliegenden kollektiven angeregten Zuständen das magnetische Moment nur von den Bahnbewegungen der Nukleonen herruehrt, zumal eine Aenderung der Spinkopplungen die Aufspaltung eines Nukleonenpaares erfordern wuerde, also eine groessere Anregungsenergie erforderte.

Nimmt man in dieser Weise an, dass das magnetische Moment des Kerns sich nur aus den Bahnmomenten der Protonen zusammensetzt, dann wird wegen des g-Faktors von 1 fuer die Bahnbewegung

$$\vec{M}_p = \sum_{i=1}^Z \vec{M}_i = \sum_{i=1}^Z \vec{\ell}_i \quad (9.1)$$

Weiterhin kann dieser Ausdruck durch Ersetzen des rechts stehenden Gesamtdrehimpulses der Protonen durch ihren kollektiven Drehimpuls weiter vereinfacht werden zu [37]

$$\vec{M}_p = \vec{J}_p = m [\alpha_p^2 \times \pi^2]^{[1]}, \quad m = i\sqrt{10} \quad (9.2)$$

Dieser Operator bestimmt, wie unten weiter erlaeutert werden wird, sowohl das magnetische Moment des Kerns wie auch die M1-Uebergangswahrscheinlichkeiten, genauso wie der Quadrupoloperator das Quadrupolmoment und auch die E2-Uebergangswahrscheinlichkeiten bestimmt.

Im VKM ist nur der Gesamtdrehimpuls des Kerns, nicht jedoch der Drehimpuls der Protonen oder Neutronen getrennt definiert. Es liegt nahe, den Protonendrehimpuls als Vielfaches des Gesamtdrehimpulses anzusetzen, wobei, wie in der Einleitung besprochen, die beiden Moeglichkeiten

$$\vec{J}_p = \frac{Z}{A} \vec{J} \quad , \quad \vec{J}_p = \frac{Q_p}{Q} \vec{J} \quad (9.3)$$

sich anbieten.

Mit dem Ansatz (9.3) ist aber noch nicht viel gewonnen, denn damit waere der Operator des magnetischen Moments als konstantes Vielfaches des Drehimpulsoperators diagonal in den Eigenzustaenden des VKM-Hamiltonoperators, koennte also insbesondere keine Uebergaenge erzeugen. Damit wuerden alle M1-Uebergangswahrscheinlichkeiten verschwinden.

Die von W. Greiner [23] gemachte Annahme einer verschiedenen statischen Deformation der Protonen und Neutronen fuehrt mit einigen klassischen Argumenten zu einem modifizierten Ausdruck fuer den Operator des magnetischen Moments :

$$M_G = g^{(0)} J_G + g^{(1)} \sum_{\mu, \nu} (2_{11}/\sqrt{2}) \alpha_{2\mu} J_{\nu} \quad (9.4)$$

Das Besondere an Gl. (9.4) ist, dass der zweite Anteil rechts den Drehimpuls mit dem nicht-konstanten Faktor α koppelt, so dass fuer ihn nicht mehr die Auswahlregeln des Drehimpulses gelten, und M1-Uebergaenge moeglich werden. Zusaetzlich hat das magnetische Moment nicht mehr die gleiche Richtung wie der Gesamtdrehimpuls, so dass der g-Faktor tensoriell wird. Unten wird gezeigt werden, dass dieser Modell-Operator auch aus der hier beschriebenen allgemeinen Theorie in stoerungstheoretischer Naeherung folgt.

In dieser Arbeit kann direkt die Definition (9.1) des magnetischen Moments benutzt werden, da ja α^p als unabhaengiger Freiheitsgrad zur Verfuegung steht. Fuer praktische Rechnungen muss man nur den Operator in die (α, ξ) -Darstellung umschreiben (s. Gl. (4.10) und (4.11)) :

$$M^{(1)} = \frac{m B_P}{B} [\alpha^2 \times \pi^2]^{(1)} + \frac{m B_n}{B} [\xi^2 \times \pi_{\xi}^2]^{(1)} - m [\alpha^2 \times \pi_{\xi}^2]^{(1)} + \frac{m B B_P}{B^2} [\xi^2 \times \pi^2]^{(1)} \quad (9.5)$$

Im Grenzfall $\xi_{2\mu} = 0$, d. h. bei gleicher Deformation von Protonen und Neutronen und gemeinsamer Bewegung, traegt nur der erste Term bei, der der Gl. (9.3) entspricht. Wenn die Massenparameter B_p und B_n einfach den Teilchenzahlen proportional sind, erhaelt man wieder den Wert Z/A fuer den g_R -Faktor.

Derselbe Grenzfall resultiert jedoch auch dann noch, wenn ξ zwar in der Rechnung vollstaendig beruecksichtigt wird, aber das Kopplungspotential $V(\alpha, \xi)$ verschwindet. In diesem Fall sind die Eigenfunktionen des Gesamtsystems naemlich einfach Produkte von α -Eigenfunktionen mit solchen von ξ , wobei die experimentell beobachtbaren Niederenergiezustae den 0^+ -Grundzustand von ξ enthalten (s. Fig. 7 in Abschnitt 8). Fuer solche Zustae traegt aber nur der erste Anteil des Operators (9.5) bei, da man bei Zerlegen der uebrigen Anteile in α - und ξ -Bestandteile in jedem Fall Erwartungswerte der Operatoren ξ , π^ξ und $[\xi \times \pi^\xi]^1$ im 0^+ -Zustand von ξ erhaelt, die verschwinden. Damit wird also der g_R -Faktor wieder einfach zu B_p/B_n , und die M1-Uebergangswahrscheinlichkeiten verschwinden.

Offenbar genuegt somit die blosse Praesenz der ξ -Vibrationen nicht, M1-Uebergaenge zu ermoeglichen. In den dabei gebrauchten Argumenten spielte die Struktur des Hamiltonoperators H_ξ gar keine Rolle, sondern es kam nur darauf an, dass sein niedrigster Eigenzustand der Null-Phononen- 0^+ -Zustand ist. Diese Tatsache hat noch eine etwas ueberraschende Konsequenz : Es liegt nahe, einen Grundzustandsdeformationsunterschied zwischen Protonen und Neutronen durch ein ξ -Potential mit deformiertem Minimum zu beschreiben, was im Grundzustands $\xi_{20} = a_{on} - a_{op} \neq 0$ entsprechen sollte. Nach dem eben gesagten ergibt dies aber keine magnetischen Effekte. Der Grund dafuer liegt in den Symmetrien des Modells. Gibt es naemlich kein Wechselwirkungspotential $V(\alpha, \xi)$, dann ist das Gesamtsystem gegen eine Drehung von ξ bei gleichzeitigem Festhalten von α invariant. Die Grundzustandsfunktion in ξ "weiss" also nichts von der Orientierung des Kerns, die durch α gegeben ist, und stellt sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jede Richtung relativ dazu ein. In Fig. 8 ist angedeutet, welche Kernformen bei festem α durch Drehen von ξ erreicht werden koennen. Offenbar sind Konfigurationen mit staerker deformierten (prolateren) Protonenverteilungen genauso haeufig wie solche, in denen die Protonenverteilung oblater ist als die der Neutronen. Alle

Effekte mitteln sich deshalb heraus.

Somit wird eine realistische Beschreibung der g_R -Faktoren und der M1-Uebergaenge erst bei Existenz eines Wechselwirkungspotentials zwischen den Freiheitsgraden α und ξ moeglich.

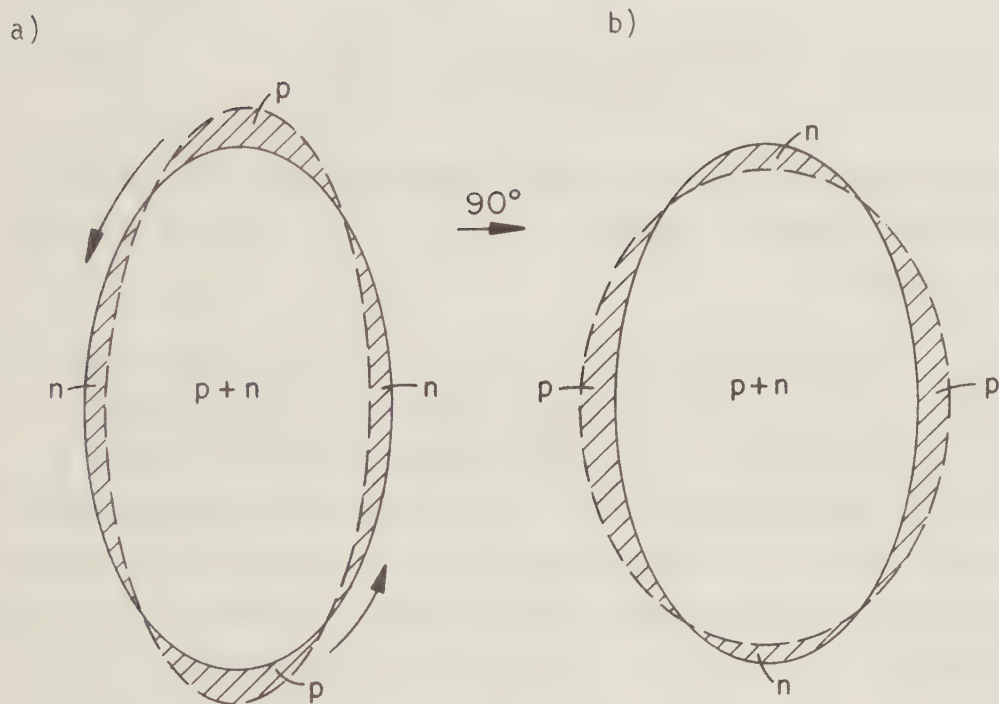


Fig. 8. Zwei Kernformen mit gleicher α -, aber verschiedener ξ -Deformation. In a) ist die Protonenverteilung staerker, in b) schwaecher deformiert als die der Neutronen.

10. Der elektrische Quadrupoloperator

Aus der allgemeinen Definition des elektrischen Quadrupolmoments

$$Q_{2\mu} = \int \rho_p r^2 Y_{2\mu} d\tau \quad (10.1)$$

leiteten Gneuss und Greiner [8-11] den folgenden Ausdruck fuer den Operator als Funktion der Kollektivkoordinate $\alpha_{2\mu}$ ab :

$$Q_{2\mu} = \rho_0 R_0^5 \left[\alpha_{2\mu} - \frac{10}{\sqrt{70}} [\alpha^1 \times \alpha^2]_{2\mu} \right] \quad (10.2)$$

Bei der Ableitung dieses Ausdrucks werden homogene Ladungsdichte und Inkompressibilitaet der Kernmaterie benutzt. Gl. (10.2) ist nur bis zu zweiter Ordnung in $\alpha_{2\mu}$ gueltig.

Die Annahme homogener Ladungsdichte lag bisher allen Rechnungen im VKM zu Grunde und soll auch fuer dieses Modell uebernommen werden. Es sei aber darauf hingewiesen, dass diese Annahme sich in Abschnitt 6 zur Berechnung der Symmetrieenergie als nicht ausreichend herausgestellt hatte. Es scheint deshalb zunaechst unberechtigt, an dieser Stelle wieder auf diese Naeherung zurueckzukommen. Man muss jedoch beruecksichtigen, dass die Symmetrieenergie sehr empfindlich auf die Verhaeltnisse an der Kernoberflaeche reagiert, da sie durch die Aenderungen im Ueberlapp zwischen Protonen und Neutronen an der Oberflaeche bestimmt wird. Dagegen ist das Quadrupolmoment ein Volumeneffekt, der nicht wesentlich durch das Verhalten der Dichte an der Oberflaeche beeinflusst wird. Deshalb ist es gerechtfertigt, die Naeherung konstanter Dichten fuer das Quadrupolmoment beizubehalten.

Im Rahmen des hier diskutierten Modells ist in Gl. (10.2) statt der gemeinsamen Deformation α die Deformation der Protonen, α^p , einzusetzen. Damit wird

$$Q_{2\mu} = \rho_0 R_0^5 \left[\alpha_{2\mu}^P - \frac{10}{\sqrt{70\pi}} [\alpha_P^2 \times \alpha_P^2]_{2\mu} \right] \quad (10.3)$$

oder nach Einfuehren von α und ξ

$$Q_{2\mu} = \rho_0 R_0^5 \left\{ \alpha_{2\mu} - \frac{B_n}{B} \xi_{2\mu} - \frac{10}{\sqrt{70\pi}} [\alpha' \times \alpha']_{2\mu} + \frac{B_n^2}{B^2} [\xi^2 \times \xi^2]_{2\mu} - \frac{2B_n}{B} [\alpha^2 \times \xi^2]_{2\mu} \right\} . \quad (10.4)$$

11. g_R -Faktor, Quadrupolmoment und Uebergangswahrscheinlichkeiten

In diesem Abschnitt sollen die Zusammenhaenge zwischen den in den beiden vorhergehenden Abschnitten diskutierten Operatoren und den experimentell beobachtbaren Groessen angegeben werden. Eine Ableitung aller dieser Beziehungen findet man etwa in [37].

Der g -Faktor eines quantenmechanischen Systems mit scharfem Drehimpuls ist definiert als das Verhaeltnis zwischen dem Erwartungswert des magnetischen Moments und dem der z -Komponente des Drehimpulses in demjenigen magnetischen Unterzustand maximaler m -Quantenzahl :

$$\vec{g} = \frac{m \langle \psi_r^e | M^{(1)} | \psi_r^e \rangle_{e=r}}{\ell} \quad (11.1)$$

Insbesondere nennt man den g -Faktor des ersten 2^+ -Zustands einer Rotationsbande den Rotations- g -Faktor g_R .

Das Quadrupolmoment eines Kernzustands ist als Erwartungswert des Quadrupoloperators im Unterzustand maximaler m -Quantenzahl definiert [32] :

$$Q = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle \psi_r^e | Q_{20} | \psi_r^e \rangle_{r=e} \quad (11.2)$$

Der gleiche Operator geht auch in die $B(E2)$ -Werte fuer elektrische Quadrupolstrahlung ein :

$$B(E2 / \ell_2 \rightarrow \ell_1) = \frac{1}{2\ell_2 + 1} \sum_{m_1, m_2} |\langle \psi_{m_1}^{\ell_1} | Q_{2, m_2} | \psi_{m_2}^{\ell_2} \rangle|^2 \quad (11.3)$$

Die $B(M1)$ -Werte fuer magnetische Monopolstrahlung werden in analoger Weise durch den Operator des magnetischen Moments gegeben :

$$B(M1 / \ell_2 \rightarrow \ell_1) = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right)^2 \frac{1}{2\ell_2 + 1} \sum_{m_1, m_2} |\langle \psi_{m_1}^{\ell_1} | M_{1,0} | \psi_{m_2}^{\ell_2} \rangle|^2 \quad (11.4)$$

Experimentell kann man am einfachsten das Mischungsverhältnis von M1- und E2-Strahlung aus Gamma-Gamma-Richtungskorrelationen bestimmen. Deshalb wird meist der sog. Mischungskoeffizient

$$\delta = -\frac{\sqrt{3}}{10} \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{B(E2/\ell_2 \rightarrow \ell_1)}{B(M1/\ell_2 \rightarrow \ell_1)}} \quad (11.5)$$

angegeben. Setzt man die Definitionen der B(E2)- und B(M1)-Werte aus den Gl. (11.3) und (11.4) ein, so erhält man den äquivalenten Ausdruck

$$\delta = -\frac{\sqrt{4\pi}}{10} \frac{e\hbar\omega}{2Mc^2} \frac{\sum_{m_1, m_2} |\langle \psi_{m_1}^{\ell_1} | Q_2 | \psi_{m_2}^{\ell_2} \rangle|}{\sum_{m_1, m_2} |\langle \psi_{m_1}^{\ell_1} | M_1 | \psi_{m_2}^{\ell_2} \rangle|} \quad (11.6)$$

In der Literatur gibt es eine Reihe verschiedener Definitionen von δ , die sich durch das Vorzeichen unterscheiden. In dieser Arbeit wird die Definition nach Krane und Steffen [17] benutzt, die sich zur Zeit in den meisten experimentellen Publikationen durchzusetzen scheint. Sie ist die in (11.5) angegebene. Eine kurze Diskussion der anderen Definitionen wird weiter unten gegeben.

12. Ein exakt loesbares Modell

Wie in den Abschnitten 6 und 7 diskutiert wurde, sind es die Terme ungerader Ordnung in ξ im Wechselwirkungspotential, die die Unterschiede zwischen Protonen und Neutronen beschreiben. Unter diesen wiederum sollte der einfachste, naemlich $[\alpha \times \xi]^0$, auch der wichtigste sein. Hier wird nun gezeigt werden, dass dieser Term einen Deformationsunterschied zwischen Protonen und Neutronen im Grundzustand des Kerns bewirkt.

Heuristisch laesst sich diese Tatsache wie folgt einsehen : Angenommen, der Grundzustand des Kerns sei so beschaffen, dass die Neutronendeformation um einen Faktor c groesser sei als die der Protonen, d. h. dass gelte

$$\alpha_n = c \alpha_p \quad (12.1)$$

Schreibt man diese Gleichung auf die (α, ξ) -Darstellung um, so wird daraus

$$\xi' = \frac{(c-1) \alpha}{c \frac{B_n}{B} + \frac{B_p}{B}} = c' \alpha \quad (12.2)$$

Gl. (12.2) legt den ξ -Wert minimaler potentieller Energie fest, so dass das Potential um diesen Punkt mindestens quadratisch ansteigen sollte :

$$V = c [(\xi - \xi') \times (\xi - \xi')]^{[0]} \quad (12.3)$$

Auswerten der Klammer in (12.3) liefert

$$V = c [\xi \times \xi]^{[0]} - 2cc' [\alpha \times \xi]^{[0]} + cc'^2 [\alpha \times \alpha]^{[0]} \quad (12.4)$$

man erhaelt also den fuehrenden Term der Symmetrieenergie und einen Wech-

selwirkungsterm der hier interessierenden Form.

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass ein Deformationsunterschied, der durch eine additive Konstante nach

$$\alpha_n = \alpha_p + C \quad (12.5)$$

eingefuehrt wird, im Rahmen dieses Modells nicht sinnvoll zu beschreiben ist, da man damit die Rotationsinvarianz aufgibt. Diese Art der Beschreibung ist jedoch im Greinerschen Modell [25] durchgefuehrt, wo dieser Nachteil sich nicht auswirkt, da im Rotations-Vibrations-Modell die Rotationsinvarianz im intrinsischen System auf jeden Fall verlorenght. Dieser prinzipielle Unterschied im Ansatz hat aber einige Konsequenzen fuer die theoretische Beziehung zwischen dem Greinerschen und dem hier vorgeschlagenen Modell, auf die im naechsten Abschnitt weiter eingegangen werden soll.

G1. (12.2) gibt einen Hinweis darauf, wie ein Kopplungspotential der Form (12.4) exakt behandelt werden kann. Man kann analog zu (12.2) eine neue kanonische Transformation durchfuehren, die durch

$$\begin{aligned} \epsilon &= C\alpha + \xi \\ \beta &= \alpha + d \cdot \xi \end{aligned} \quad (12.6)$$

gegeben wird. Dabei ist die neue Koordinate ϵ so konstruiert, dass das Grundzustandsminimum des Potentials bei $\epsilon = 0$ liegt. Die zweite Transformationsgleichung wurde so angesetzt, dass mit Hilfe der noch freien Groesse d wieder die gemischten Terme in der kinetischen Energie zum Verschwinden gebracht werden koennen.

Ebenso wie bei der kanonischen Transformation in Abschnitt 4 werden die kanonisch konjugierten Impulse berechnet :

$$\tilde{L} = (\alpha + d\xi) \pi_\beta + (C\alpha + \xi) \pi_\varepsilon \quad (12.7)$$

$$\pi_\alpha = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \alpha} = \pi_\beta + C \pi_\varepsilon \quad \pi_\xi = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \xi} = d \pi_\beta + \pi_\varepsilon$$

Das Einsetzen dieser Impulse in die kinetische Energie fuehrt nach einigen Umformungen zu folgendem Resultat :

$$\begin{aligned} T = & P_\alpha [\pi_\beta \times \pi_\beta]^{[0]} + 2C P_\alpha [\pi_\beta \times \pi_\varepsilon]^{[0]} \\ & + C^2 P_\alpha [\pi_\varepsilon \times \pi_\varepsilon]^{[0]} + P_\xi d^2 [\pi_\beta \times \pi_\beta]^{[0]} \\ & + 2d P_\xi [\pi_\varepsilon \times \pi_\beta]^{[0]} + P_\xi [\pi_\varepsilon \times \pi_\varepsilon]^{[0]} \end{aligned} \quad (12.8)$$

Offensichtlich ist die Bedingung fuer ein Verschwinden des gemischten Terms

$$C P_\alpha + d P_\xi = 0 \quad (12.9)$$

Damit ist die kanonische Transformation eindeutig durch die Konstante c , die mit dem Unterschied in der Grundzustandsdeformation zwischen Protonen und Neutronen verknuepft ist, festgelegt.

Der wichtigste Anteil des ε -abhaengigen Potentials ist der harmonische Term

$$C [\varepsilon \times \varepsilon]^{[0]} = C [\xi \cdot \xi]^{[0]} + 2c [x \cdot \xi]^{[0]} \quad (12.10)$$

der mithin den frueheren Wechselwirkungsterm aus Gl. (12.4) mit enthaelt.

Das physikalische Verhalten des (β, ϵ) -Systems ohne Kopplung ist dasselbe wie das des (α, ξ) -Systems mit der einzigen Kopplung (12.4), wenn man den rein α -abhängigen Term von Gl. (12.10) in den Hamiltonoperator $H(\alpha)$ einbezieht und diesen einfach durch $H(\beta)$ ersetzt. Letzteres ist plausibel, da dieser Operator aus VKM-Fits stammt, also an das Niederenergiespektrum angepasst wurde, das in β genauso wie in α erste Näherung für das richtige Eigenspektrum sein sollte. Ausserdem ist der Uebergang vom VKM zu diesem Modell insofern zweideutig, als man die eine Koordinate α des VKM genauso gut durch das jetzige α wie durch β ersetzen koennte.

In der (β, ϵ) -Beschreibung ist das Eigenspektrum analog dem Spektrum der Basisfunktionen in der (α, ξ) -Darstellung, d. h. das Niederenergiespektrum entsteht durch Kopplung der Eigenzustände von $H(\beta)$ mit dem 0^+ -Grundzustand in ϵ :

$$| \ell m, \ell_\epsilon \ell_\beta \tau_\epsilon \tau_\beta \rangle = \sum_{m_\epsilon m_\beta} (\ell_\epsilon \ell_\beta \ell / m_\epsilon m_\beta m) | \ell_\epsilon \tau_\epsilon \rangle | \ell_\beta \tau_\beta \rangle \quad (12.11)$$

Das physikalische Interessante an der neuen Beschreibung wird aber erst ersichtlich, wenn man auch den Operator des magnetischen Moments nach (9.5) in die neuen Koordinaten umschreibt. Einsetzen von (12.6) und (12.9) führt auf

$$\begin{aligned} M^{LJ} &= m [\vec{\alpha}_p \times \vec{\pi}_p]^LJ \\ &= [\vec{\beta} \times \vec{\pi}_\beta]^LJ \left\{ \frac{m}{G} \frac{B_p}{B} \left(1 + c \frac{B_n}{B} \right)^2 \right\} \\ &+ [\vec{\epsilon} \times \vec{\pi}_\epsilon]^LJ \left\{ \frac{m}{G} \frac{B_n}{B} \left(1 - c \frac{B_p}{B} \right)^2 \right\} \\ &- [\vec{\beta} \times \vec{\pi}_\epsilon]^LJ \left\{ \frac{m}{G} \left(1 + c \frac{B_n - B_p}{B} - c^2 \frac{B_p B_n}{B^2} \right) \right\} \\ &- [\vec{\epsilon} \times \vec{\pi}_\beta]^LJ \left\{ \frac{m}{G} \left(\frac{B_p B_n}{B^2} \right) \left(1 + c \frac{B_n - B_p}{B} - c^2 \frac{B_n B_p}{B^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (12.12)$$

mit $G = (1 - cd)$.

Die Erwartungswerte und Uebergangswahrscheinlichkeiten werden wieder dadurch vereinfacht, dass der erste Term in Gl. (12.11) proportional zum β -Drehimpuls ist, waehrend die anderen Terme im 0^+ -Grundzustand von ε verschwindende Matrixelemente ergeben. Damit verschwinden die M1-Matrixelemente auch in dieser Beschreibung, und M1-Ueb ergaenge bleiben verboten. Der g_R -Faktor ergibt sich leicht aus dem Koeffizienten des ersten Terms in Gl. (12.12) zu

$$g = \frac{1}{G} \left(\frac{B_p}{B} \right) \left(1 + c \frac{B_n}{B} \right)^2 \quad (12.13)$$

In erster Ordnung in c ist das exakt der gleiche Wert, der im Greinerschen Modell fuer die Grundzustandsbande folgt ([23], s. a. Abschnitt 13). Dagegen liefert jenes Modell nichtverschwindende M1-Ueb ergangswahrscheinlichkeiten, im Gegensatz zu dem hier erhaltenen. Auf die Gruende dafuer wird im naechsten Abschnitt zurueckgekommen.

Abschliessend sei noch der transformierte Quadrupoloperator angegeben :

$$\begin{aligned} Q_{2\mu} = & \int_0 R_0^2 \left\{ \frac{(B - cB_n)}{BG} \beta_{2\mu} + \frac{B_n - dB}{BG} \varepsilon_{2\mu} \right. \\ & - \frac{10}{\sqrt{70\pi}} \left[\frac{(B - cB_n)^2}{B^2 G^2} [\beta^2 \times \beta^2]_{2\mu} \right. \\ & + \frac{(B_n - dB)^2}{B^2 G^2} [\varepsilon^2 \times \varepsilon^2]_{2\mu} \\ & \left. \left. + \frac{2(B - cB_n)(B_n - dB)}{B^2 G^2} [\varepsilon^2 \times \beta^2]_{2\mu} \right] \right\} \end{aligned} \quad (12.14)$$

Die rein β -abhaengigen Terme zeigen klar die veraenderte Protonen-Deformation, ebenso wie das im M1-Operator der Fall war.

13. Das Greinersche Modell

Zum besseren physikalischen Verstaendnis des hier vorgeschlagenen Modelles ist ein Vergleich mit dem frueheren Modell von Greiner [23] aufschlussreich.

In jenem Modell wurde davon ausgegangen, dass die Grundzustandsdeformationen von Protonen und Neutronen verschieden sind, d. h. dass gilt $\beta_0(p) \neq \beta_0(n)$. Dieser Deformationsunterschied ist allerdings rein statischer Natur; er bleibt unveraendert bei allen Bewegungen erhalten. Als dynamische Koordinate fungiert weiterhin nur die "Schwerpunktskoordinate"

$$\beta_0 = \frac{N \beta_0(n) - Z \beta_0(p)}{A} \quad (13.1)$$

die, wie im Rahmen des Rotations-Vibrations-Modells ueblich, in eine statische Grundzustandsdeformation β_0 und einen dynamischen Anteil a'_0 , der die Auslenkung aus der Ruhelage bei β -Vibrationen beschreibt, sowie eine dynamische asymmetrische Deformation a'_2 aufgeteilt wird. Es gilt also

$$a_0 = \beta_0 + a'_0, \quad a_2 = 0 + a'_2 \quad (13.2)$$

und analog fuer die Deformation der Protonen

$$a_0(p) = \beta_0(p) + a'_0, \quad a_2(p) = 0 + a'_2 \quad (13.3)$$

wobei nur der statische Anteil anders ausfaellt als in Gl. (13.2), waehrend die dynamischen Auslenkungen die gleichen sind wie fuer das Gesamtsystem.

Unter der Annahme gleicher Winkelgeschwindigkeit von Protonen und Neutronen kann man wieder aus den Traegheitsmomenten den g_R -Faktor berechnen.

Fuer eine Drehung um die i -te Achse des intrinsischen Koordinatensystems erhaelt man

$$g_i = \frac{J_{pi}}{J_i} = \frac{\tilde{\omega}_{pi}}{\tilde{\omega}_i} \quad (13.4)$$

wobei die Traegheitsmomente allgemein durch die Bohrsche Formel

$$\tilde{\omega} = B (3 a_0^2 + 2 a_2^2 \pm \sqrt{6} a_0 a_2) \quad (13.5)$$

gegeben sind.

Das wesentliche Neue an Gl. (13.4) und (13.5) ist, dass der g -Faktor fuer verschiedene Rotationsachsen verschiedene Werte annimmt, und ausserdem ueber die Groessen $a_0(p)$, $a_2(p)$, a_0 und a_2 von den dynamischen Koordinaten a'_0 und a'_2 abhaengt. Der g_R -Faktor ist demnach jetzt ein *deformations-abhaengiger Tensor*.

Die uebliche definierende Beziehung fuer den g -Faktor, die das magnetische Moment und den Drehimpuls verknuepft,

$$M^{(1)} = g(\beta_0) J \quad (13.6)$$

kann man nun in erster Ordnung in den Auslenkungen a'_0 und a'_2 umschreiben zu

$$M_0 = g^{(0)} J_0 + g^{(1)} \sum_{\mu} (2 \hbar / \mu \nu \epsilon) a_\mu J_\nu \quad (13.7)$$

wobei die Deformationsabhaengigkeit des g -Faktors durch den zweiten Term, der zusaetzlich zum Drehimpuls die Koordinate α enthaelt, zum Ausdruck kommt, waehrend die Groessen $g^{(i)}$ konstant sind. Ein Vergleich mit (13.4)

liefert diese Koeffizienten :

$$g^{(0)} \approx \frac{Z}{A} (1 - \frac{4}{3}f) \quad (13.8)$$

$$g^{(1)} = -\frac{3}{2} \sqrt{10} \frac{Z}{A} (1 - 2f) \frac{f}{\beta_0}$$

$$f = (\beta_0 - \beta_0(P)) / \beta_0 \approx N/A (\beta_0(n) / \beta_0(P) - 1)$$

Rechnet man die Matrixelemente von (13.7) im Rotations-Vibrations-Modell aus, dann erhaelt man in der Grundzustandsbande den konstanten g_R -Faktor

$$g_R = \frac{Z}{A} (1 - 2f) \quad (13.9)$$

Fuer die β -Bande ergibt sich der gleiche Wert, waehrend der g_R -Faktor innerhalb der γ -Bande drehimpulsabhaengig wird.

Zu den M1-Uebergangswahrscheinlichkeiten traegt der erste Term in (13.7) nichts bei, waehrend der zweite Term wegen der zusaetzlichen α -Abhaengigkeit i. a. nicht-verschwindende Matrixelemente hat.

Diese Ergebnisse scheinen im Widerspruch zu dem im letzten Kapitel dargelegten exakt loesbaren Sonderfall des hier entwickelten Modells zu stehen. Zwar stimmt der g_R -Faktor in erster Ordnung in C (im Greinerschen Modell wurde nur bis zu erster Ordnung in f gerechnet) mit (13.9) ueberein, wenn man beruecksichtigt, dass aus

$$\begin{aligned} B_n &\approx Z, \quad B \approx A, \quad B_n \approx N \\ G &\approx 1, \quad C \frac{B_n}{B} = -f \end{aligned} \quad (13.10)$$

folgende Beziehung zwischen dem Greinerschen f und der in Abschnitt 12

eingefuehrten Groesse c besteht :

$$C = -\frac{B}{B_n} f \approx -\frac{A}{N} f \quad (13.11)$$

Andererseits fuehrt aber der Ansatz aus Abschnitt 12 immer noch zu verschwindenden $B(M1)$ -Werten.

Der Grund fuer diese Diskrepanz liegt darin, dass in Gl. (12.1) der Deformationsunterschied multiplikativ eingefuehrt wurde, waehrend sich Gl. (13.2) und (13.3) nur um eine additive Konstante unterscheiden. Mit (12.1) waere auch $a'_{0p} = c' \cdot a'_0$ und $a'_{2p} = a'_2$. Damit kuerzen sich aber in (13.4) die Klammerausdruecke aus (13.5) gegenseitig weg und die α - und Richtungsabhaengigkeit des g -Faktors verschwindet.

Das hier dargestellte Modell ist nicht in der Lage, eine additive Definition des Deformationsunterschiedes analog dem Greinerschen Modell zu inkorporieren, da dadurch eine Richtung im Raum ausgezeichnet wuerde und damit die Drehinvarianz des Modells verloren ginge, mit erheblichen Nachteilen fuer die theoretische Formulierung. Demnach koennen $M1$ -Uebergaenge hier nur durch hoehere Wechselwirkungsterme zwischen den Freiheitsgraden α und ξ ermoeeglicht werden. Im naechsten Abschnitt wird gezeigt werden, dass schon ein weiterer Term in stoerungstheoretischer Naeherung auf einen Operator der Form (13.7) fuer das magnetische Moment fuehrt.

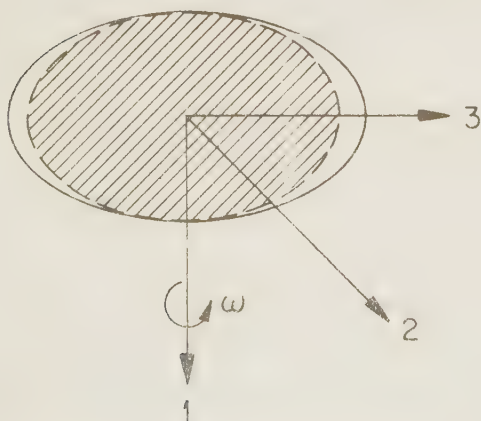


Fig. 9. Schematische Darstellung der Massen- (Protonen und Neutronen zusammen) und Protonen-Oberflaeche im Greinerschen Modell. Die Rotation erfolgt um die 1- oder 2-Achse.

14. Störungstheorie

Der sehr grosse Schalenabstand von ca. 15 MeV im Eigenspektrum von H_ξ und die besondere Struktur des Kopplungspotentials $V(\alpha, \xi)$ lassen eine störungstheoretische Behandlung des Problems aussichtsreich erscheinen. Da naemlich in jedem Term von $V(\alpha, \xi)$ genau ein ξ vorkommt, erzeugt oder vernichtet $V(\alpha, \xi)$ ein und nur ein ξ -Phonon. Fuer die hier hauptsaechlich interessierenden niedrigsten Energieniveaus bedeutet das, dass V eine Wechselwirkung in erster Ordnung nur mit den auf dem Ein-Phonon- 2^+ -Zustand von ξ aufgebauten Basiszustaenden vermittelt. Fuer eine Anwendbarkeit der Störungstheorie reicht es also aus, wenn $V(\alpha, \xi)$ klein gegen den ξ -Schalenabstand von 15 MeV ist.

Ein Zustand der Form $|J_\alpha, 0_\xi^+, \gamma_\alpha, \gamma_\xi, J\rangle$, der aus dem 0^+ -Grundzustand von ξ und einem α -Zustand mit Drehimpuls J_α zum Gesamtdrehimpuls J zusammengekoppelt ist, wird unter dem Einfluss des Störungspotentials $V(\alpha, \xi)$ modifiziert zu

$$|J'_\alpha, 0'_\xi, \delta'_\alpha, \delta'_\xi, J'\rangle = |J_\alpha, 0_\xi^+, \delta_\alpha, \delta_\xi, J\rangle + \sum_{i \neq j} \frac{|J''_\alpha, 2''_\xi, \delta''_\alpha, \delta''_\xi, J''\rangle \langle J''_\alpha, 2''_\xi, \delta''_\alpha, \delta''_\xi, J''| V |J_\alpha, 0_\xi^+, \delta_\alpha, \delta_\xi, J\rangle}{E_\alpha - E''_\alpha + E_\xi - E''_\xi} \quad (14.1)$$

Dabei laeuft die Summe ueber alle Basiszustaende, die den Ein-Phonon- 2^+ -Zustand von ξ enthalten, da sonst das Matrixelement von V verschwindet. $E_\xi + E_\alpha$ bzw. $E''_\xi + E''_\alpha$ sind die Energien und γ_α bzw. γ_ξ etwaige zusaetzliche Quantenzahlen der Basiszustaende. Wegen $E''_\xi - E_\xi = \hbar\omega_\xi \gg |E''_\alpha - E_\alpha|$ kann man nun auch noch im Nenner den ξ -abhaengigen Anteil der Energie vernachlaessigen, so dass der Nenner insgesamt konstant wird. Damit ist

$$|J'_\alpha, 0'_\xi, \delta'_\alpha, \delta'_\xi, J'\rangle \approx |J_\alpha, 0_\xi^+, \delta_\alpha, \delta_\xi, J\rangle - \frac{1}{\hbar\omega_\xi} \sum_{i \neq j} |J''_\alpha, 2''_\xi, \delta''_\alpha, \delta''_\xi, J''\rangle \langle J''_\alpha, 2''_\xi, \delta''_\alpha, \delta''_\xi, J''| V |J_\alpha, 0_\xi^+, \delta_\alpha, \delta_\xi, J\rangle \quad (14.2)$$

$$= |J_\alpha, 0_\xi^+, \delta_\alpha, \delta_\xi, J\rangle - \frac{1}{\hbar\omega_\xi} V(\alpha, \xi) |J_\alpha, 0_\xi^+, \delta_\alpha, \delta_\xi, J\rangle$$

wobei zuletzt noch die Vollstaendigkeit der Zwischensumme ausgenutzt wurde.

Mit dem Ergebnis (14.2) lassen sich alle interessierenden Matrixelemente leicht ausrechnen. Fuer einen beliebigen Operator wird mit Hilfe von (14.2) das Matricelement zwischen zwei gestoerten Zustaenden zu

$$\langle \delta_{\alpha}^{\prime} \delta_{\beta}^{\prime} \delta_{\gamma}^{\prime} \delta_{\delta}^{\prime} | \hat{O} - \frac{1}{\hbar \omega_{\xi}} (\hat{O} V + V \hat{O}) | \delta_{\alpha} \delta_{\beta}^+ \delta_{\gamma} \delta_{\delta} \rangle \quad (14.3)$$

Dabei wurden Terme zweiter Ordnung in $V(\alpha, \xi)/\hbar \omega_{\xi}$ weggelassen.

Der Effekt des Kopplungspotentials laesst sich demnach auch anders beschreiben : Nach Gl. (14.3) kann man die Uebergangswahrscheinlichkeiten auch erhalten, indem man die Basiszustaende ungestoert uebernimmt, aber den Operator $\hat{O}$ durch einen 'gestoerten' Operator

$$\hat{O}' = \hat{O} - \frac{1}{\hbar \omega_{\xi}} (\hat{O} V + V \hat{O}) \quad (14.4)$$

ersetzt. Weiter wird es sich zeigen, dass die Abhaengigkeit von ξ in Gl. (14.3) leicht beseitigt werden kann, da nur der 0^+ -Grundzustand von ξ eingeht und bei einem Zerlegen des Operators O in α - und ξ -abhaengige Bestandteile die letzteren durch Zahlen ersetzt werden koennen. Das soll im folgenden fuer die Operatoren des magnetischen Moments und des Quadrupolmoments durchgefuehrt werden.

Im Falle des magnetischen Dipoloperators nach Gl. (9.5) laesst sich sofort sehen, dass die Terme in $[\alpha \times \pi^{\alpha}]^1$ und $[\xi \times \pi^{\xi}]^1$ nicht zur Stoerung in (14.3) beitragen, da sie die ξ -Phononenzahl um 0 oder 2 aendern, also zusammen mit dem ξ des Kopplungspotentials die Phononenzahl um mindestens eine Einheit abaendern muessen, so dass der Erwartungswert des Produktes dieser Terme mit dem Potential im ξ -Grundzustand verschwindet.

Bei den anderen Termen kommt man durch Umkoppeln weiter. Schreibt man das Potential zur Abkuerzung in der Form

$$[f(\alpha) \times \xi]^{[0]} \quad f(\alpha) = C \alpha^2 + D [\alpha^2 \times \alpha^2]^{[0]} \quad (14.5)$$

so wird

$$[\alpha \times \pi_\xi]^{[1]} \times [f(\alpha) \times \xi]^{[0]} = \sum_{L,K} \langle 22,1,22,0,1 | 22,K,22,L,1 \rangle \cdot [\xi \times \pi_\xi]^{[K]} \times [\alpha \times f(\alpha)]^{[L]}]^{[1]} \quad (14.6)$$

Offensichtlich sind die Auswahlregeln fuer den ξ -Anteil in Gl. (14.3) nur fuer den Term auf der rechten Seite erfuehlbar, fuer den $L=0$ ist. Dann muss $K=1$ sein, und wegen $[\alpha \times \alpha]^1=0$ und $[\alpha \times [\alpha \times \alpha]^2]^1=0$ traegt auch dieser Term nichts bei.

Der Term mit $[\xi \times \pi^\alpha]^1 = -[\pi^\alpha \times \xi]^1$ kann auf dieselbe Weise umgekoppelt werden. Auch hier muss zur Erfuehlung der Auswahlregeln $L=0, K=1$ gelten, so dass der effektive Operator zu

$$[\xi \times \pi]^{[1]} \times [f(\alpha) \times \xi]^{[0]}]^{[1]} = \sum_{K,L} \langle 22,1,22,0,1 | 22,K,22,L,1 \rangle \times [f(\alpha) \times \pi]^{[K]} \times [\xi \times \xi]^{[L]}]^{[1]} \quad (14.7)$$

wird. Dieser einzig verbliebene Anteil liefert aber nun tatsaechlich nicht-verschwindende Matrixelemente. Setzt man ihn in Gl. (14.3) ein und entkoppelt das Matrixelement in α - und ξ -Bestandteile, so erhaelt man

$$\begin{aligned} & \langle \partial'_\alpha, O_\xi^+, \delta'_\alpha, \delta'_\xi, J' | [\alpha^2 \times \pi^2]^{[1]} | \partial_\alpha, O_\xi^+, \delta_\alpha, \delta_\xi, J \rangle = \langle J' | \\ & = \frac{i B_P \sqrt{10}}{B} \langle \partial'_\alpha \delta'_\alpha | [\alpha^2 \times \pi^2]^{[1]} | \partial_\alpha \delta_\alpha \rangle \\ & = \frac{2i \sqrt{10}}{5} \frac{B_N B_P}{B^2 \hbar \omega_\xi} \langle \partial'_\alpha \delta'_\alpha | [\pi^2 \times f(\alpha)]^{[1]} | \partial_\alpha \delta_\alpha \rangle \langle O_\xi^+ \delta'_\xi | [\xi^2 \times \xi^2]^{[0]} | O_\xi^+ \delta_\xi \rangle \end{aligned} \quad (14.8)$$

Hierin ist nur noch

$$\langle O_3^+ \delta_3' \| [\xi^2 \times \xi^2]^{(0)} \| O_3^+ \delta_3 \rangle = \frac{5}{4} \frac{\hbar \omega_\xi}{C_\xi} \quad (14.9)$$

einzusetzen, und es wird

$$\begin{aligned} & \langle \partial_\alpha O_3^+ \delta_\alpha' \delta_3' J' \| [\pi_P^2 \times \pi_P^2]^{(0)} \| J_\alpha O_3^+ \delta_\alpha \delta_3 J \rangle \\ &= \frac{i\sqrt{10} B_P}{B} \langle \partial_\alpha \delta_\alpha' \| [\alpha^2 \times \pi^2]^{(0)} \| J_\alpha \delta_\alpha \rangle - \frac{i\sqrt{10}}{2} \frac{B_n B_P}{B^2 C_\xi} \langle \partial_\alpha \delta_\alpha' \| [\pi \times f(\alpha)]^{(0)} \| \partial_\alpha \delta_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (14.10)$$

Damit erhaelt man fuer den "gestoerten" Operator des Protonendrehimpulses

$$J_P' = \frac{B_P}{B} J_\alpha - \frac{i\sqrt{10} B_n B_P}{2 B^2 C_\xi} [\pi^2 \times f(\alpha)]^{(0)} \quad (14.11)$$

Durch Ausrechnen laesst sich zeigen, dass in diesem Falle $[f(\alpha) \times \pi^\alpha]^1 = -[\pi^\alpha \times f(\alpha)]^1$ gilt (das ist nicht trivial, da die Operatoren nicht kommutieren) und damit Gl. (14.11) sich weiter zu

$$\begin{aligned} & \langle \partial_\alpha O_3^+ \delta_\alpha' \delta_3' J' / J_P' / \partial_\alpha O_3^+ \delta_\alpha \delta_3 J \rangle = \\ & i\sqrt{10} \left(\frac{B_P}{B} + \frac{C}{C_\xi} \frac{B_n B_P}{2 B^2} \right) \langle \partial_\alpha O_3^+ \delta_\alpha' \delta_3' J' \| [\alpha \times \pi]^{(1)} \| \partial_\alpha O_3^+ \delta_\alpha \delta_3 J \rangle \\ & + i \frac{C}{C_\xi} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{B_n B_P}{B^2} \langle \partial_\alpha O_3^+ \delta_\alpha' \delta_3' J' \| [[\alpha^2 \times \alpha^2]^{(2)} \times \pi^2]^{(0)} \| \partial_\alpha O_3^+ \delta_\alpha \delta_3 J \rangle \end{aligned} \quad (14.12)$$

vereinfacht.

Aehnlich verlaeuft die Rechnung fuer den Operator des Quadrupolmoments. Von den fuenf Termen in Gl. (10.4) tauchen aus den eben eroerterten Gruenden wieder nur die im Endergebnis auf, die genau ein ξ enthalten. Auch in diesem Fall wird analog zum M1-Operator umgekoppelt und dann das Matrixelement von $[\xi \times \xi]^0$ eingesetzt; als Endergebnis erhaelt man nach kurzer

Rechnung

$$\begin{aligned}
 & \langle \delta_\alpha^+ O_3 \delta_\alpha^+ \delta_\beta^+ J | Q^{E2} | \delta_\alpha^+ O_3 \delta_\alpha^+ \delta_\beta^+ J \rangle = \\
 & \rho_0 R_0^5 \left\{ \left(1 + \frac{C B_n}{2 C_3 B} \right) \langle \delta_\alpha^+ \delta_\alpha^+ | \alpha^2 | \delta_\alpha^+ \delta_\alpha^+ \rangle \right. \\
 & \left. + \left(\frac{D B_n}{2 C_3 B} - \frac{10}{170 \pi} - \frac{10 D B_n}{C_3 B (70 \pi)} \right) \langle \delta_\alpha^+ \delta_\alpha^+ | [\alpha^2 \times \alpha^1]^{E2} | \delta_\alpha^+ \delta_\alpha^+ \rangle \right\} \quad (14.13)
 \end{aligned}$$

Gl. (14.12) und (14.13) erlauben es, den g_R -Faktor und die E2/M1-Mischungsverhältnisse in störungstheoretischer Näherung zu berechnen und umgekehrt aus den experimentellen Werten fuer diese Groessen auf die unbekannten Groessen B_p/B , C und D zu schliessen, die in die Theorie eingehen, sofern man die Wellenfunktionen des Gneuss-Greiner-Modells als gegeben annimmt.

Diese Ergebnisse fuer die effektiven Operatoren erlauben jedoch noch eine weitergehende Interpretation. Man kann die Gl. (14.12) und (14.13) naemlich auch als eine Entwicklung der effektiven Operatoren nach Potenzen von α ansehen, wobei nur bis zu erster Ordnung gegangen wurde. In dieser Interpretation ist die Gueltigkeit der *allgemeinen Form der Operatoren* nicht an die der Stoerungsrechnung gebunden. Wenn die stoerungstheoretische Naehierung nicht mehr gut ist, lassen sich dann nur die Ergebnisse nicht mehr als Effekt eines Kopplungspotentials $V(\alpha, \xi)$ verstehen oder haengen nicht mehr in so einfacher Weise damit zusammen. Auch die Koeffizienten geben dann zwar immer noch die genaue Struktur des Operators, nicht jedoch mehr die des Kopplungspotentials an. In diesem Sinne ist der effektive Operator eine Groesse, die naeher zum Experiment steht, waehrend das Kopplungspotential nur unter weiteren theoretischen Annahmen daraus abgeleitet werden kann.

15. Ergebnisse und Zusammenfassung

Bevor einige mit dem hier gechilderten Modell errechnete Ergebnisse diskutiert werden, soll zuvor noch ein kurzer Ueberblick ueber die z. Zt. vorhandenen experimentellen Daten gegeben werden.

Zur Messung des E2/M1-Mischungsverhaeltnisses benutzt man Richtungskorrelationen in γ -Kaskaden. Man misst die Korrelationen zwischen den Winkelverteilungen zweier unmittelbar aufeinander folgender γ -Uebergaege, von denen einer eine bekannte Winkelverteilung hat, und ist damit in der Lage, auf die unbekannte Winkelverteilung des anderen Ueberganges zu schliessen, womit sich dann auch dessen M1-Beimischung errechnen laesst.

In der experimentell am haeufigsten benutzten Situation geht der erste Uebergang von der γ -Bande in die Grundzustandsbande, und der zweite fuehrt innerhalb dieser weiter nach unten. Fuer den zweiten Uebergang muss demnach $\Delta I=2$ sein, so dass er keine M1-Beimischung haben kann. Da die hoeheren Multipole praktisch immer vernachlaessigbar sind, ist damit dieser zweite Uebergang ein reiner E2-Uebergang mit bekannter Winkelverteilung, so dass die Winkelkorrelation auf die M1-Beimischung des ersten Uebergangs zu schliessen gestattet.

Diese Art von γ -Kaskade ist experimentell so vorteilhaft, dass die weitaus meisten bisher gemessenen δ -Werte zu Uebergangen von der γ - in die Grundzustandsbande gehoeren. Leider ist dasselbe Verfahren fuer die β -Bande wesentlich schwerer durchzufuehren, da deren Zustaende schwieriger zu besetzen sind und meist mehrere schwer zu trennende Kaskaden gemischt sind. Dementsprechend sind nur relativ wenige δ -Werte fuer Uebergaege von der β - in die Grundzustandsbande bekannt.

Der Vergleich und die Interpretation der Messwerte werden erschwert durch mehrere gebraeuchliche Definitionen des δ -Werts, die sich praktisch nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Zur Zeit scheint die Definition von Krane und Steffen [17] sich durchzusetzen. Sie lautet :

$$\delta = - \frac{\sqrt{3}}{10} \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{B(E2/\gamma_2 \rightarrow \gamma_1)}{B(M1/\gamma_2 \rightarrow \gamma_1)}} \quad (15.1)$$

In der vorliegenden Arbeit wird durchgehend diese Definition verwendet. Der Vollstaendigkeit halber seien aber noch die Unterschiede zu den beiden anderen gaengigen Definitionen angegeben. Der δ -Wert nach Rose und Brink [16] unterscheidet sich von (15.1) nur durch das Vorzeichen [43], waehrend nach der Definition von Biedenharn und Rose [44] der δ -Wert fuer den zweiten Uebergang der Kaskade mit dem von Krane und Steffen und fuer den ersten Uebergang mit dem von Rose und Brink uebereinstimmt, so dass fuer ein und denselben Uebergang verschiedene Vorzeichen gelten, je nachdem, durch welche Kaskade er gemessen wurde. Zusammengefasst gilt

$$\begin{aligned} \delta(\gamma_1)_{BR} &= -\delta(\gamma_1)_{KS} \\ \delta(\gamma_2)_{BR} &= \delta(\gamma_2)_{KS} \\ \delta(\gamma_1)_{RB} &= -\delta(\gamma_1)_{KS} \\ \delta(\gamma_2)_{RB} &= -\delta(\gamma_2)_{KS} \end{aligned} \quad (15.2)$$

mit den Abkuerzungen BR = Biedenharn-Rose, RB = Rose-Brink, KS = Krane-Steffen und dem Index 1,2 fuer den ersten bzw. zweiten Uebergang einer Kaskade.

Ein Ueberblick ueber bisher gemessene E2/M1-Mischungsverhaeltnisse findet sich in einigen Review-Artikeln [44-51], die jedoch wegen der raschen Entwicklung in diesem Gebiet besonders in den letzten Jahren keineswegs vollstaendig sind. Es gibt zwar fuer eine grosse Zahl von Nukliden Messwerte fuer den δ -Wert des $2^{+1} \rightarrow 2^{+}$ - Uebergangs, aber es ist relativ selten, dass bei einem Kern δ -Werte fuer mehr als zwei oder drei Uebergaenge bekannt sind. Dabei handelt es sich um einige Kerne aus der Os-Pt-Region und aus der

Sm-Gd-Gegend sowie einige vereinzelte Nuklide wie ^{132}Xe oder ^{166}Er und ^{160}Dy .

Angesichts dieser Situation laesst sich fuer die δ -Werte der $2^{+1} \rightarrow 2^{+}$ -Uebergaenge allein ein Ansatz einer Systematik erstellen. In Abhaengigkeit von Protonen- und Neutronenzahl erreichen sie Maxima in der Mitte zwischen abgeschlossenen Schalen mit Werten ueber 10, gehen aber in der Naehue magischer Zahlen um mehrere Groessenordnungen zurueck. Das Vorzeichen haengt ebenfalls mit den magischen Zahlen zusammen; man findet in Schalenmitte beide Vorzeichen etwa gleich haeufig, waehrend nahe magischer Zahlen ein Vorzeichen dominiert.

Dieses allgemeine Verhalten ist leicht zu verstehen, wenn man bedenkt, dass das Kollektivmodell in seiner einfachen Version (ohne Unterschiede zwischen Protonen und Neutronen) verschwindende M1-Uebergangswahrscheinlichkeiten, also $\delta = \pm\infty$ ergibt, waehrend fuer ein reines Einteilchenmodell der δ -Wert eines 1 MeV-Ueberganges in Weisskopfabshaetzung bei

$\delta =$	0.006,	0.024,	0.038,	0.055	fuer
$A =$	8,	64,	125,	216	liegt [46].

Wenn der δ -Wert demnach um mehrere Groessenordnungen groesser ist als diese Einteilchen-Abschaetzungen, dann sollte es sich um einen Uebergang stark kollektiven Charakters handeln. Das oben erwaehnte systematische Verhalten der Messwerte stimmt also gut mit der Tatsache ueberein, dass die Kerne in der Mitte zwischen abgeschlossenen Schalen besonders gut mit kollektiven Modellen beschrieben werden koennen, waehrend nahe magischer Zahlen die Einteilcheneffekte eine groessere Rolle spielen.

Zur Interpretation der Vorzeichen laesst sich aus den experimentellen Daten nicht viel sagen. Das Vorherrschen eines Vorzeichens nahe magischer Zahlen koennte als Resultat des Vorwiegens der Zwei-Protonen-Anregungen verstanden werden [45]. Die Tatsache, dass das Greinersche Modell durchweg das gleiche Vorzeichen fuer verschiedene Uebergaenge innerhalb eines Nuklids ergab, hat Anlass zu der Vermutung gegeben, dass die experimentell beobach-

teten Vorzeichenwechsel nicht-kollektiven Charakter anzeigen [52,53], zumal Kumar und Baranger [7] im Rahmen ihres mehr mikroskopischen Modells diese Vorzeichenwechsel reproduzieren konnten.

Bei den g_R -Faktoren ist die Lage recht aehnlich, was die Verteilung der Messwerte betrifft. Von sehr vielen Nukliden ist der g -Faktor des ersten angeregten 2^+ -Zustandes gemessen, nur von sehr wenigen aber die g -Faktoren hoeherer Zustaeude oder gar ausserhalb der Grundzustandsbande. Hinzu kommt noch, dass die Messgenauigkeit oft gering ist und die verschiedenen Methoden verschiedene Ergebnisse liefern. Es kann vorkommen, dass man fuer ein und denselben Kern Werte zwischen 0.2 und 0.4 angegeben findet. Eine Zusammenstellung findet man in den Uebersichtsartikeln [54,55]; da diese jedoch aelteren Datums sind, wurden fuer diese Arbeit neben Originalarbeiten die letzten Ausgaben der Nuclear Data Sheets herangezogen.

Angesichts dieser experimentellen Lage scheint es sinnvoll, die theoretischen Untersuchungen hauptsaechlich auf die δ -Werte zu stuetzen und die g_R -Faktoren nur zum Vergleich heranzuziehen.

Tabelle 1 fasst die Messwerte fuer diejenigen Nuklide zusammen, fuer die theoretische Rechnungen durchgefuehrt wurden. Bei der Auswahl dieser Kerne waren zwei Gesichtspunkte ausschlaggebend : einerseits mussten in genuegender Zahl experimentelle δ -Werte vorliegen, und andererseits sollte eine den Kern gut beschreibende VKM-Potentialenergieflaeche vorhanden sein oder doch ohne zu grossen Rechenaufwand zu errechnen sein.

In Tabelle 1 lassen sich gut einige der oben erwaehten Gesetzmaessigkeiten erkennen. So sind z. B. bei dem sehr guten Rotator ^{166}Er die Werte im Durchschnitt sehr viel groesser als bei den Uebergangskernen aus der Os-Pt-Region. Auch zeigt sich bei Er durchweg das gleiche Vorzeichen, waehrend bei ^{192}Pt sich gerade ein δ -Wert im Vorzeichen von den anderen unterscheidet.

Fuer die Osmium-Isotope wurde von frueher durchgefuehrten Anpassungen der VKM-Potentialenergieflaeche an die Niederenergiespektren ausgegangen [43], waehrend fuer die angegebenen Pt-, Er- und Dy-Isotope vollstaendig neu

Tabelle 1. Uebersicht ueber Messwerte magnetischer Kerneigenschaften einiger Kerne.

Messwert	^{186}Os	^{188}Os	^{190}Os	^{192}Os	^{192}Pt	^{166}Er	^{160}Dy
$g(2_1^+)$	0.280 0.272 0.24 0.315	0.28 0.31 0.305	0.38	0.274 0.32 0.39	0.27	0.329 0.312 0.305	0.364 0.352 0.38 0.370 0.18
$g(2_2^+)$		0.420 0.580			0.308		
$g(4_1^+)$						0.32 0.299	
$\delta(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	-10_{-5}^{+4} -15_{-15}^{+5}	-12.5 ± 3.0 -12.3 ± 7.8	-8.6 ± 9	-4.3 ± 6	8.8 ± 3	-16_{-12}^{+5}	$-9.7_{-1.7}^{+2.5}$ -13.5 ± 3.0
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_1^+)$	-13_{-9}^{+6}	-7.5 ± 2.0 -6.9 ± 3.2	$-10.2 \pm 1.$	-6.7 ± 9	-2.0 ± 2	$-31_{-\infty}^{+15}$ $-18_{-\infty}^{+15}$	-18 ± 5
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_2^+)$			-16_{-20}^{+5}		$ \delta \approx 3$	-9_{-319}^{+5}	-7_{-5}^{+26}
$\delta(4_2^+ \rightarrow 4_1^+)$			-3.0_{-9}^{+6}		-7.0_{-3}^{+4}	-10_{-27}^{+4} $-3.3_{-1.2}^{+3.0}$	
$\delta(5_1^+ \rightarrow 4_2^+)$			-9_{-8}^{+3}				
$\delta(5_1^+ \rightarrow 4_1^+)$						-20_{-4}^{+4} -37_{-10}^{+3}	
$\delta(5_1^+ \rightarrow 6_1^+)$						-25_{-3}^{+3} $-85_{-\infty}^{+45}$	
$\delta(6_2^+ \rightarrow 6_1^+)$						-20_{-90}^{+9}	

Die Quellen fuer die Messwerte sind bei den Tabellen fuer die einzelnen Kerne angegeben.

gerechnet werden musste. Leider konnten wegen der beschraenkten zur Verfuegung stehenden Rechenzeit keine Rechnungen fuer andere noch in Frage kommende Kerne, wie etwa ^{154}Gd oder $^{152,154}\text{Sm}$ mit relativ vielen Messwerten [52,52,45], mehr angegangen werden.

Bei den Osmium-Isotopen, die zuerst behandelt wurden, zeigte sich, dass eine gute Anpassung der Potentialenergieflaeche an die Niederenergiespektren allein noch keine Garantie fuer eine optimale Reproduktion der Uebergangswahrscheinlichkeiten bietet. Zum Beispiel sind in Tabelle 2 die $B(E2)$ -Werte fuer ^{190}Os mit dem Experiment verglichen. Man sieht, dass der $B(E2)$ -Wert fuer den $0_1^+ \rightarrow 2_2^+$ - Uebergang um Groessenordnungen falsch liegt. Das liegt natuerlich nicht an der Qualitaet des Modells oder der Rechnungen, sondern daran, dass nur die Energieniveaus im Fit beruecksichtigt wurden, so dass es eher erstaunt, wie relativ gut die $B(E2)$ -Werte zusaetzlich durch das Modell wiedergegeben werden.

Da die Uebergangswahrscheinlichkeiten direkter mit den Wellenfunktionen zusammenhaengen als die Lage der Energieniveaus, ist dieses Ergebnis auch ein Ausdruck der Tatsache, dass die Wellenfunktionen eines quantenmechanischen Systems sich stark aendern koennen, ohne dass sich das Spektrum der Eigenwerte wesentlich verschiebt. Ein Fit des VKM nur an die Energieniveaus reicht also u. U. nicht aus, auch die Wellenfunktionen eindeutig genug festzulegen; dies kann erst unter Beruecksichtigung der $B(E2)$ -Werte oder anderer, durch nichtdiagonale Matrixelemente gegebener Groessen geschehen. Andererseits spricht es fuer den physikalischen Inhalt des Modells, dass die $B(E2)$ -Werte schon dann einigermaßen sinnvoll herauskommen, wenn nur an die Energieniveaus gefittet wurde.

Erfreulicherweise war eine Korrektur der Potentialenergieflaeche der Potentialenergieflaeche nur bei den beiden Isotopen $^{190,192}\text{Os}$ noetig, wo sie die stark vom Experiment abweichenden $B(E2)$ -Werte entscheidend verbesserte ohne die anderen wesentlich abzuändern. Bei den Kernen, fuer die der VKM-Fit voellig neu gerechnet werden musste, wurden dagegen von Anfang an die $B(E2)$ -Werte mit beruecksichtigt.

Tabelle 2. Vergleich der theoretischen $B(E2)$ -Werte aus Ref. [43] mit den experimentellen Werten sowie den durch weitere Anpassung in dieser Arbeit erhaltenen.

Kern	Uebergang	$B(E2)_{\text{exp}}$	$B(E2)_{\text{neu}}$	$B(E2)$ [42]
^{190}Os	$0_1^+ \rightarrow 2_1^+$	2.379	2.379	2.540
	$0_1^+ \rightarrow 2_2^+$	0.230	0.085	0.0001
	$2_1^+ \rightarrow 2_2^+$	0.260	0.391	0.696
	$2_1^+ \rightarrow 4_1^+$	1.119	1.232	1.340
	$2_1^+ \rightarrow 4_2^+$	0.019	0.008	
	$2_2^+ \rightarrow 4_2^+$	0.736	0.880	
	$4_1^+ \rightarrow 4_2^+$	0.360	0.252	
	$4_1^+ \rightarrow 6_1^+$	1.500	1.232	
^{192}Os	$0_1^+ \rightarrow 2_1^+$	2.000	2.000	2.340
	$2_1^+ \rightarrow 2_2^+$	0.360	0.549	0.700
	$0_1^+ \rightarrow 2_2^+$	0.200	0.010	0.013
	$2_1^+ \rightarrow 4_1^+$	0.975	1.039	1.260
	$4_1^+ \rightarrow 4_2^+$	0.370	0.285	
	$2_2^+ \rightarrow 4_2^+$	0.310	0.557	
	$4_1^+ \rightarrow 6_1^+$	1.260	1.119	

Die $B(E2)$ -Werte sind hier und in allen anderen Tabellen und Figuren in der Einheit $e^2 \cdot \text{barn}^2$ angegeben.

Vor der Diskussion der Ergebnisse sei noch der praktische Ablauf der Rechnungen geschildert.

Die aus dem VKM-Fit erhaltenen kollektiven Wellenfunktionen wurden als Eigenfunktionen $|J_\alpha\rangle$ des Hamiltonoperators $H(\alpha)$ interpretiert. Damit konnten dann mit Hilfe der Gleichungen (14.12) und (14.13) die Matrixelemente des M1- und des E2-Operators berechnet werden, aus denen nach Gl. (11.1) und (11.6) die theoretischen δ -Werte und g_R -Faktoren folgen. In diesen stehen aber noch die unbekannten Groessen B_p/B , C und D, die durch einen Least-Square-Fit bestimmt werden muessen. Da die δ -Werte und g_R -Faktoren nicht linear von diesen Variablen anhaengen, musste ein nicht-lineares Fit-Verfahren benutzt werden. Nach Ref. [54] kommt dabei am guenstigsten ein modifizierter Gauss-Algorithmus [55] oder das sog. Marquardt-Verfahren in Frage [56]. In dieser Arbeit wurde mit dem Marquardt-Verfahren gearbeitet und damit eine gute Genauigkeit bei geringer Iterationszahl erreicht.

Eine Schwierigkeit bei der Anwendung eines Fitverfahrens bildet die Definition (11.6) des δ -Werts, der bei verschwindendem M1-Matrixelement singulaer wird. Da gerade im Kollektivmodell das M1-Matrixelement oft nahe bei Null liegt, waehrend das E2-Matrixelement i. a. gross ist, waere es guenstiger, den δ -Wert an das reziproke Verhaeltnis $B(M1)/B(E2)$ anzulehnen. In diesem Modell speziell ist das M1-Matrixelement im nichtdiagonalen Fall proportional zu D (s. Gl. (14.12)), verschwindet also fuer $D=0$ und wechselt sein Vorzeichen mit D. Das hat den unerwuenschten Effekt, dass der δ -Wert als Funktion von D bei $D=0$ einen Pol erster Ordnung besitzt, was einen Least-Square-Fit sehr erschwert. Es empfiehlt sich deshalb, statt mit den δ -Werten selbst lieber mit den Kehrwerten zu arbeiten, wodurch man stetige Funktionen bekommt.

Bei der Berechnung der theoretischen Werte wurde durchgehend die Stoerungstheorie nach Abschnitt 14 angewandt, da die exakte Diagonalisierung des gekoppelten Systems wegen des grossen Rechenaufwandes zumindest fuer den Fit nicht in Frage kam. Zur Kontrolle wurde aber mit den aus der Stoerungsrechnung erhaltenen Werten fuer B_p/B , C und D die exakte Rechnung

durchgefuehrt und die Ergebnisse verglichen. Dabei zeigte sich nur eine geringe Abweichung, die unter 5% blieb. Auch erwies sich, dass die Eigenenergien und $B(E2)$ -Werte des vollstaendigen Systems nur wenig von denen des gestoerten, und diese wiederum kaum von denen des ungestoerten Systems abwichen, so dass die mit dem VKM-erzielte Uebereinstimmung dieser Daten mit dem Experiment nicht verloren ging. An dieser Stelle sei aber noch einmal betont, dass nach den Bemerkungen am Ende von Abschnitt 14 die Gueltigkeit der Theorie und insbesondere der Gestalt des effektiven $M1$ -Operators nicht unbedingt an die Guete der stoerungstheoretischen Naehierung gebunden ist.

Im folgenden werden die Ergebnisse fuer die oben genannten Kerne im Einzelnen diskutiert. Dabei wird jeweils zunaechst die durch Anpassung des VKM an die Spektren und $B(E2)$ -Werte gewonnene Potentialenergieflaeche in Hoehenliniendarstellung zusammen mit durch die Flaeche gezogenen Schnitten gezeigt. In den Figuren sind dazu die experimentellen und Theoretischen Spektren und $B(E2)$ -Werte angegeben. Fuer jeden Kern folgen darauf in einer Tabelle die experimentellen und theoretischen δ -Werte und g_R -Faktoren, die, soweit verfuegbar, mit den Ergebnissen anderer Theorien verglichen werden.

Interessant ist dabei besonders ein Vergleich mit der Greinerschen Theorie [25] (s. a. Abschnitt 13), die ja einen aehnlichen effektiven $M1$ -Operator benutzt, wie er hier aus der stoerungstheoretischen Naehierung resultiert. Der Unterschied zur hier gegebenen Theorie besteht darin, dass in der Greinerschen Form des Operators nicht drei, sondern nur eine unabhengige Unbekannte existieren, was aus einer geometrischen Ueberlegung folgt. Man erhaelt die Beziehungen

$$D = \frac{9\sqrt{7}}{8\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\beta_0} C \left(+ \frac{3N}{4A} C \right) , \quad B_P/B = Z/A \quad (15.3)$$

zwischen den hier eingefuehrten Groessen, und wenn nur der Rotations- g_R -Faktor bekannt ist, ist damit die einzige noch freie Konstante C schon

festgelegt.

Wenn das Greinersche Modell auch urspruenglich im Rahmen des Rotations-Vibrations-Modells formuliert wurde, so laesst sich diese Einschraenkung doch dadurch leicht umgehen, dass man einfach die Wellenfunktionen durch die des VKM ersetzt, aber den M1-Operator, der ja den wesentlichen physikalischen Inhalt des Modells enthaelt, unveraendert uebernimmt. Durch einen Vergleich mit den Ergebnissen des neueren Modells koennen damit zwei Fragestellungen untersucht werden : Inwieweit das VKM gerade die Uebergangskerne wie Osmium und Platin besser beschreibt als das Rotations-Vibrationsmodell, und ob die Einschraenkung der Parametrisierung nach Gl. (15.3) und damit die zu Grunde liegenden physikalischen Ueberlegungen bei einem Vergleich mit der allgemeineren Parametrisierung mit drei freien Groessen gut abschneidet.

In den Rechnungen zeigte sich, dass dieser Ansatz mit immerhin zwei Freiheitsgraden weniger im Vergleich zum allgemeineren Ansatz ueberraschend gut arbeitete und insbesondere die Systematik der δ -Werte gut reproduzierte; meist liegen die Werte zwar in der durchschnittlichen Groesse falsch, die relativen Unterschiede aber kommen gut heraus. Es sieht also so aus, als ob eine der Gleichungen (15.3) i. a. gut erfuehlt ist, jedoch muss fuer eine vollstaendigere Beschreibung wohl mindestens mit zwei Parametern gerechnet werden.

Die Ergebnisse fuer die Osmium- und Platinisotope sind in den Fig. 10-14 und den Tabellen 3-7 angegeben. Wie schon in [43] diskutiert wurde, erkennt man klar den Uebergang von einem relativ guten Rotator wie ^{186}Os zu dem in γ -Richtung sehr weichen ^{192}Os und dem im Grundzustand triaxialen ^{192}Pt . Die Uebereinstimmung mit den experimentellen Werten ist sowohl fuer die $B(E2)$ -Werte wie auch fuer die magnetischen Daten zufriedenstellend, wobei allerdings fuer die leichteren Isotope nicht viele Messwerte vorliegen.

An dieser Stelle muss darauf hingewiesen werden, dass es zwar einfach erscheint, mit drei freien Variablen vier experimentelle Werte zu reproduzieren, dieser Eindruck aber in der Praxis truegt. Man hat es hier nicht mit einer glatten Funktion zu tun, bei der eine gefittete Funktion,

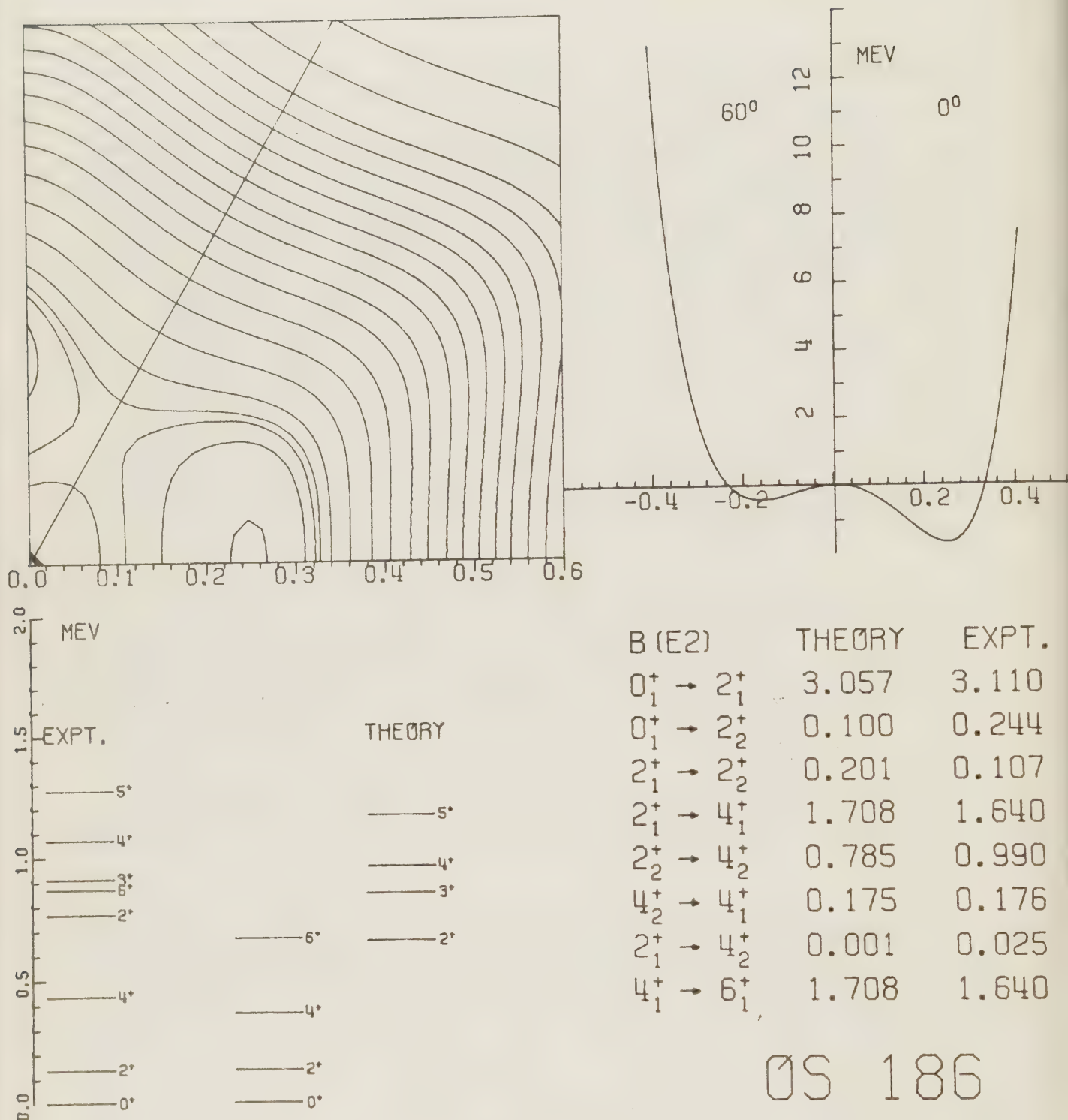


Fig. 10. VKM-Potentialenergieflaeche mit Schnitten entlang der angegebenen Winkel, experimentelles und theoretisches Spektrum und $B(E2)$ -Werte fuer ^{186}Os . Die experimentellen Daten stammen aus Ref. [57,58].

Tabelle 3. Ergebnisse fuer ^{186}Os .

Messwert	Experiment	Theorie	KB*	Greiner**	B(E2)***
$g(2_1^+)$	0.28 0.272 0.24 0.315	0.258		0.277	----
$\delta(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	-10_{-15}^{+4} -15_{-15}^{+5}	-10.0	-14.7	-5.4	0.201
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_1^+)$	-13_{-9}^{+6}	-13.5	-13.5	-7.4	0.044
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_2^+)$		-3.2			0.965
$\delta(3_1^+ \rightarrow 4_1^+)$		-6.3			0.120
$\delta(4_2^+ \rightarrow 4_1^+)$		-6.0			0.176
$\delta(5_1^+ \rightarrow 4_1^+)$		-9.1			0.019
$\delta(5_1^+ \rightarrow 6_1^+)$		-4.3			0.146

Die experimentellen Werte stammen aus Ref. [44-46].

*) Ergebnisse von Kumar und Baranger [1-7].

**) Ergebnisse unter Einschraenkung des M1-Operators nach Gl. (15.3) analog der Greinerschen Theorie, jedoch unter Verwendung der VKM-Wellenfunktionen.

***) Theoretische B(E2)-Werte; hier auch fuer Uebergaenge angegeben, fuer die noch keine Messwerte vorliegen.

Tabelle 4. Ergebnisse fuer ^{188}Os .

Messwert	Experiment	Theorie	KB*	Greiner*	B(E2)*
$g(2_1^+)$	0.28 0.31 0.305	0.395		0.283	----
$g(2_2^+)$	0.42 0.58	0.423		0.42	----
$\delta(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	-12.5 ± 3.0 -12.3 ± 7.8	-9.5	-10	-3.8	0.342
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_1^+)$	-7.5 ± 2.0 -6.9 ± 3.2	-13.5	-11	-8.6	0.028
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_2^+)$		-5.7			0.804
$\delta(3_1^+ \rightarrow 4_1^+)$		-6.1			0.197
$\delta(4_2^+ \rightarrow 4_1^+)$		-6.4			0.241
$\delta(2_1^+ \rightarrow 4_1^+)$		----			1.468
$\delta(2_1^+ \rightarrow 4_2^+)$		----			0.001
$\delta(2_2^+ \rightarrow 4_2^+)$		----			0.707
$\delta(4_1^+ \rightarrow 6_1^+)$		----			1.400

Die experimentellen Werte stammen aus Ref. [44-46].

*) s. Bemerkungen zu Tabelle 3.

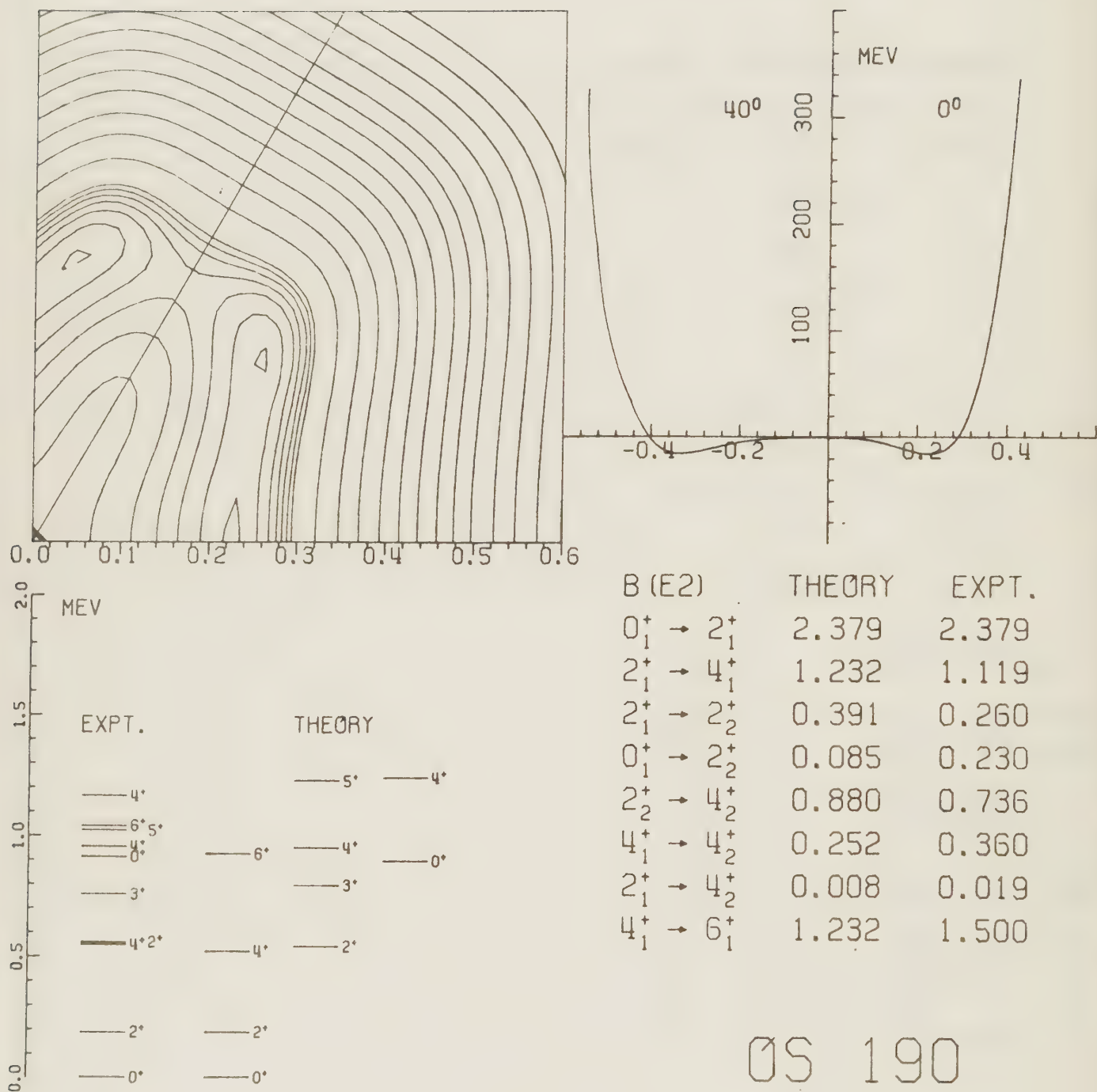


Fig. 12. Wie Fig. 10, jedoch fuer ^{190}Os . Experimentelle Daten aus Ref. [57,58].

Tabelle 5. Ergebnisse fuer ^{190}Os .

Messwert	Experiment	Theorie	KB*	Greiner*	B(E2)*
$g(2_1^+)$	0.38	0.38		0.38	----
$\delta(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	-8.6 ± 0.9	-9.4	-7.6	-10.8	0.391
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_1^+)$	-10.2 ± 1.1	-13.6	-9.9	-15.5	0.024
$\delta(3_1^+ \rightarrow 4_1^+)$	-16_{-20}^{+5}	-5.0	-4.6	-5.8	0.306
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_2^+)$	-9_{-5}^{+2}	-6.5	-7.1	-7.5	0.768
$\delta(4_2^+ \rightarrow 4_1^+)$	$-3.4_{-.9}^{+.6}$	-6.0		-6.8	0.252
$\delta(5_1^+ \rightarrow 4_1^+)$	-9_{-8}^{+3}	-7.8		-8.6	0.001
$\delta(5_1^+ \rightarrow 6_1^+)$		-3.7			0.309
$\delta(2_1^+ \rightarrow 4_1^+)$		----			1.232
$\delta(2_1^+ \rightarrow 4_2^+)$		----			0.008
$\delta(2_2^+ \rightarrow 4_2^+)$		----			0.880
$\delta(4_1^+ \rightarrow 6_1^+)$		----			1.232

Die experimentellen Werte stammen aus Ref. [44-46].

*) s. Bemerkungen zu Tabelle 3.

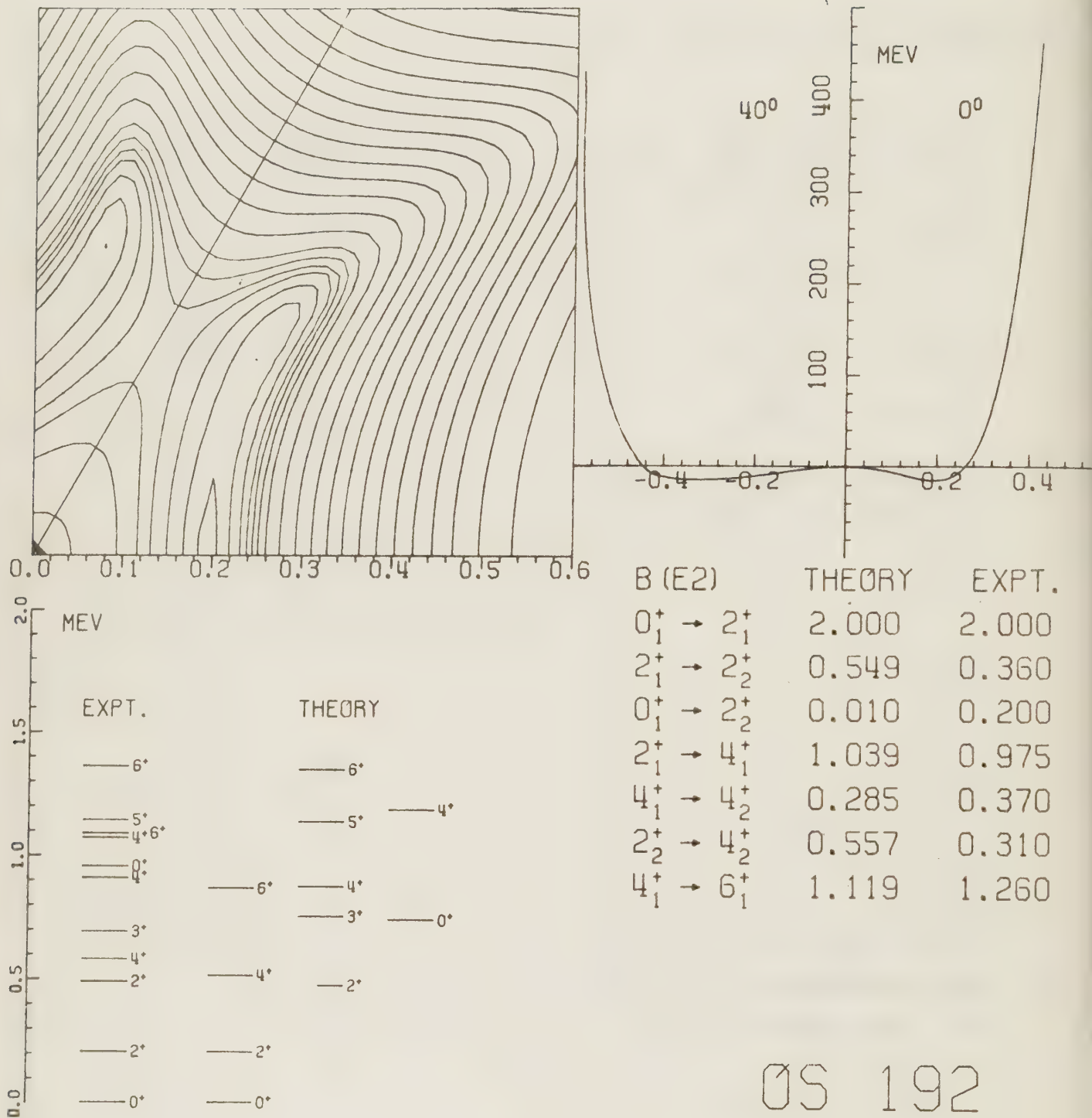


Fig. 13. Wie Fig. 10, jedoch fuer ^{192}Os . Experimentelle Daten aus Ref. [57,58].

Tabelle 6. Ergebnisse fuer ^{192}Os .

Messwert	Experiment	Theorie	KB*	Greiner*	B(E2)*
$g(2_1^+)$	0.274 0.32 0.39	0.385		0.311	----
$\delta(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	-4.3 ± 0.6	-3.7	-5.2	-2.4	0.549
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_1^+)$	-6.7 ± 0.9	-7.1	-4.8	-7.0	0.001
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_2^+)$	$-3.6^{+1.2}_{-2.2}$	-3.5	-5.6	-2.2	0.660
$\delta(3_1^+ \rightarrow 4_1^+)$		-2.5			0.305
$\delta(4_2^+ \rightarrow 4_1^+)$		-2.9			0.285
$\delta(5_1^+ \rightarrow 4_1^+)$		-5.8			0.004
$\delta(5_1^+ \rightarrow 6_1^+)$		-1.9			0.284
$\delta(6_2^+ \rightarrow 6_1^+)$		-2.7			0.189
$\delta(2_1^+ \rightarrow 4_1^+)$		----			1.039
$\delta(2_1^+ \rightarrow 4_2^+)$		----			0.018
$\delta(2_2^+ \rightarrow 4_2^+)$		----			0.557
$\delta(4_1^+ \rightarrow 6_1^+)$		----			1.119

Die Messwerte stammen aus Ref. [44-46].

*) S. Bemerkungen zu Tabelle 3.

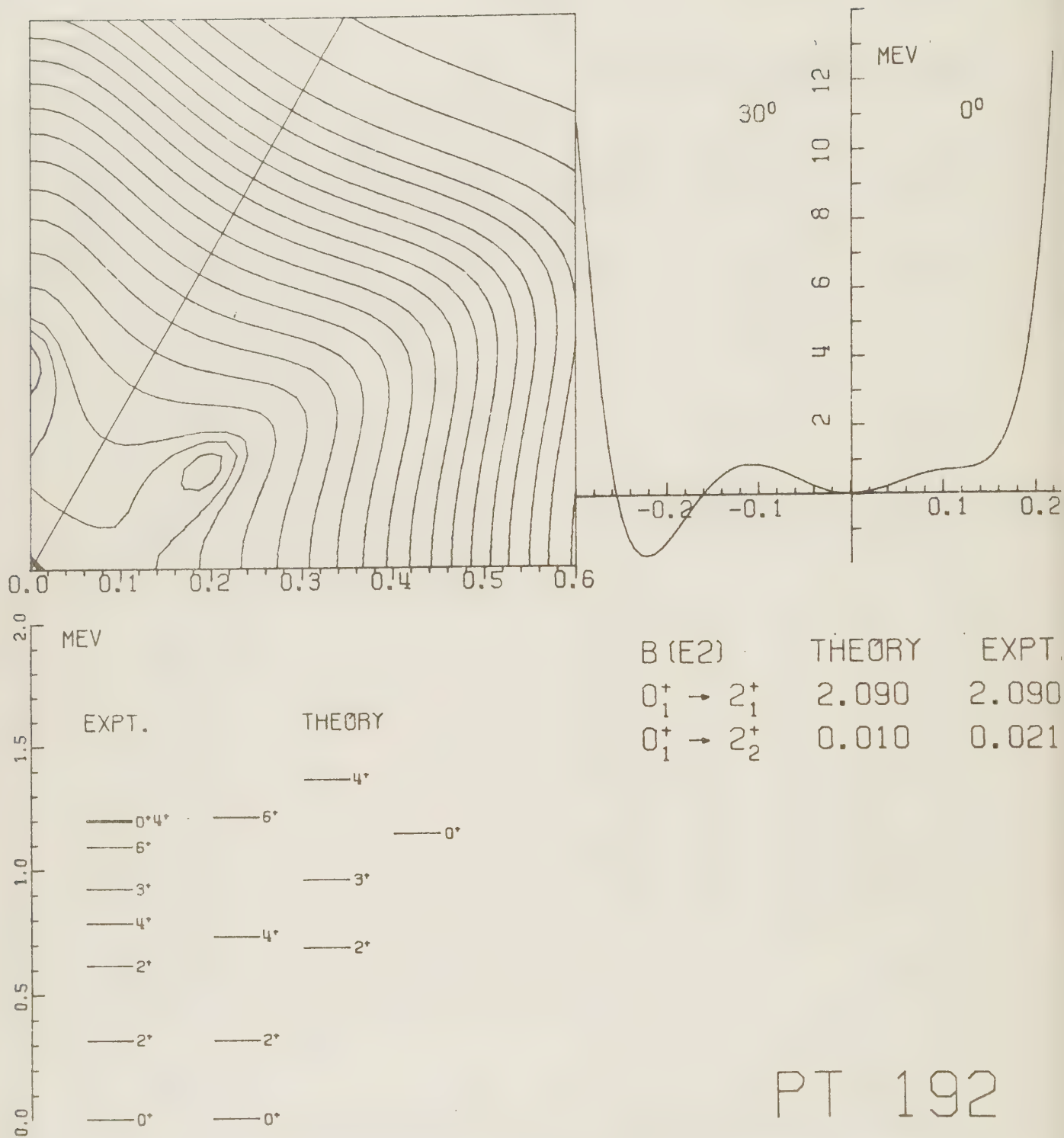


Fig. 14. Wie Fig. 10, jedoch fuer ¹⁹²Pt. Experimentelle Daten aus Ref. [58,59].

Tabelle 7. Ergebnisse fuer ^{192}Pt .

Messwerte	Experimente	Theorie	KB*	Greiner*	B(E2)*
$g(2_1^+)$	0.27	0.295		0.333	----
$g(2_2^+)$	0.308	0.284		0.296	----
$\delta(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	8.8 ± 0.3	8.8	14.8	2.7	0.443
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_1^+)$	-2.0 ± 0.2	-2.0	-2.2	-5.2	0.003
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_2^+)$	7.8 ± 0.3	6.6	9.2	2.2	0.722
$\delta(3_1^+ \rightarrow 4_1^+)$	$ \delta \approx 3$	3.7	2.9	1.2	0.319
$\delta(4_2^+ \rightarrow 4_1^+)$	7.0^{+4}_{-3}	7.7		2.3	0.159
$\delta(2_1^+ \rightarrow 4_1^+)$		----			0.970
$\delta(2_1^+ \rightarrow 4_2^+)$		----			0.007
$\delta(2_2^+ \rightarrow 4_2^+)$		----			0.456
$\delta(4_1^+ \rightarrow 6_1^+)$		----			1.024

Die experimentellen Werte stammen aus Ref. [44-46].

*) s. Bemerkungen zu Tabelle 3.

die drei Stellen einigermaßen trifft, auch bei einer vierten Stelle i. a. nicht zu weit entfernt liegen wird, sondern mit voellig unzusammenhaengenden Messwerten, so dass die theoretischen Matrixelemente sich von Punkt zu Punkt schon einigermaßen richtig aendern muessen, damit auch ein vierter Messwert wenigstens in der Groessenordnung reproduziert wird. Die Zahl der Variablen im Vergleich zu den Messwerten truegt also etwas, wenn man die Situation mit den gewoehnlichen Kurven-Fits vergleicht.

Bei ^{192}Pt ist besonders der Vorzeichenwechsel interessant, der in diesem Modell, und zwar sogar in der Greinerschen Parametrisierung, richtig beschrieben wird. Der Grund hierfuer liegt in den Wellenfunktionen des VKM, da diese das Einzige sind, was sich gegenueber dem frueheren Greinerschen Modell geaendert hat. Das VKM liefert also zumindest in diesem Punkt eine wesentliche Verbesserung gegenueber dem Rotations-Vibrations-Modell. Insgesamt jedoch bleibt der Greinersche Ansatz, wie oben schon erwaehnt, etwas zu speziell, um auch die mittlere Groesse der δ -Werte richtig wiederzugeben.

Zum Vergleich sind in den Tabellen auch die Ergebnisse des Pairing-plus-Quadrupole-Modells von Kumar und Baranger [1-7] angegeben. Sie liefern eine vergleichbare Guete, man darf aber nicht vergessen, dass ihr Modell von einem mikroskopischen Ansatz ausgeht, waehrend das hiesige rein deskriptiv und kollektiv orientiert ist.

Die Figuren 15 und 16 und die Tabellen 8 und 9 zeigen die Ergebnisse fuer ^{166}Er und ^{160}Dy . Da das Verhalten dieser Kerne einem idealen Rotator relativ nahe kommt, sind die δ -Werte sehr gross und auch mit grossen Fehlern behaftet. Letzteres kommt einfach daher, dass fuer $B(M1) \rightarrow 0$ $\delta \rightarrow \infty$ geht, so dass ein kleiner Fehler in der Uebergangswahrscheinlichkeit einem sehr grossen Fehler in δ entsprechen kann.

Auch hier ist die Uebereinstimmung mit dem Experiment zufriedenstellend, wenn man von einigen Uebergaengen zwischen hoeher liegenden Zustaaenden absieht. Vermutlich beschreibt der VKM-Fit einige dieser Zustaende noch nicht hinreichend genau. Es ist jedoch schwer moeglich, den Fit

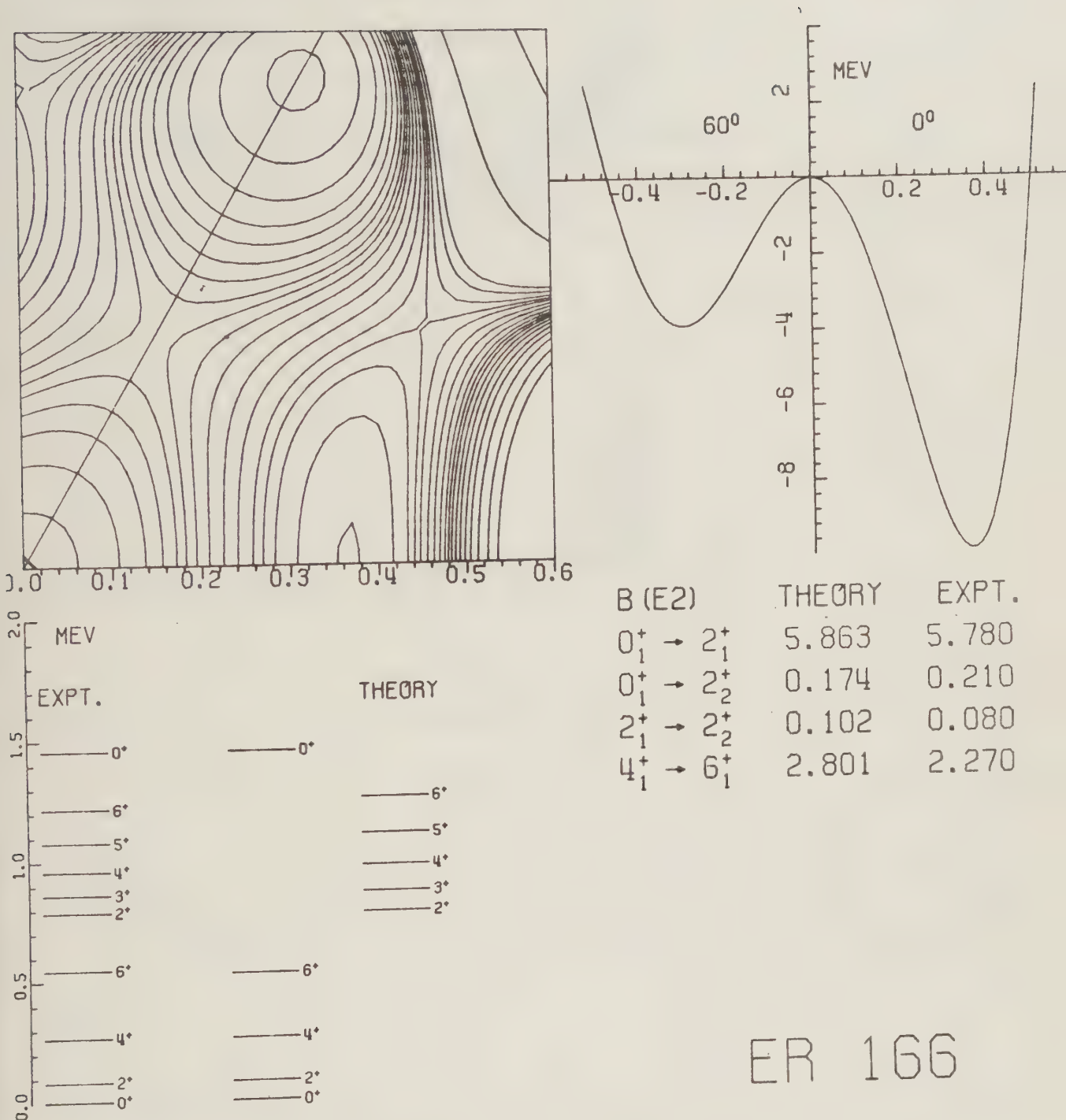


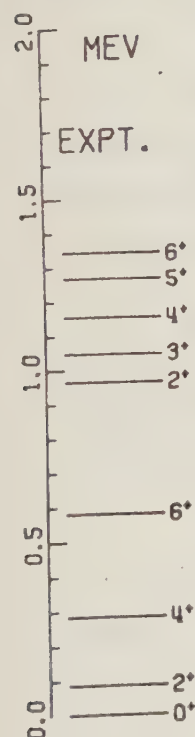
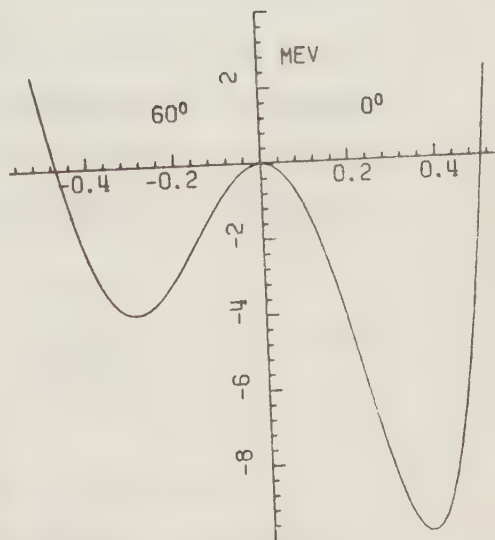
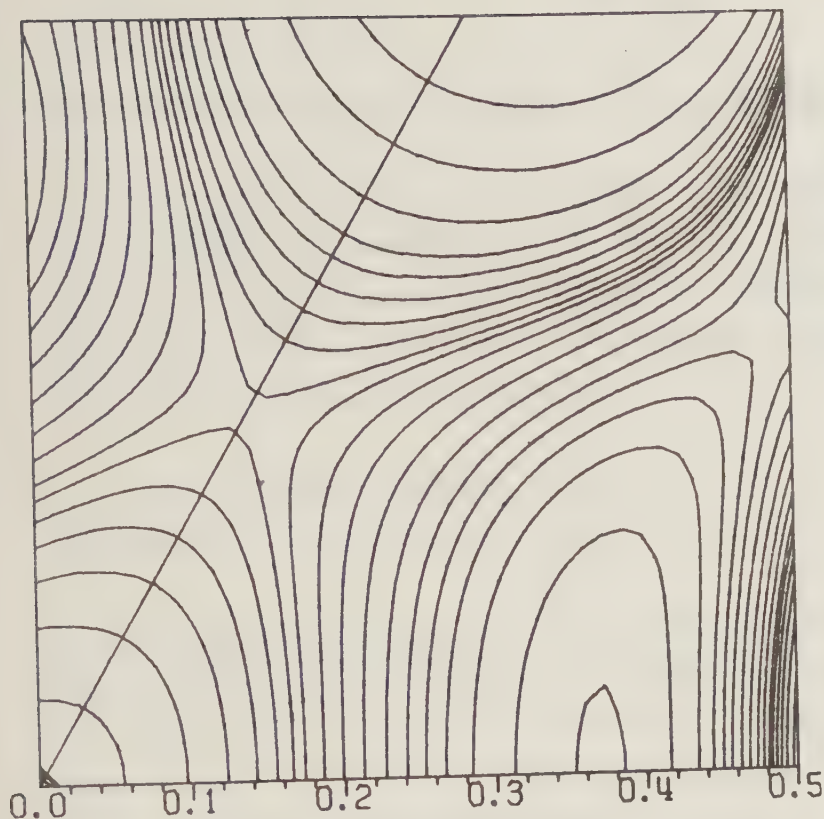
Fig. 15. Wie Fig. 10, jedoch fuer ^{166}Er . Experimentelle Daten aus Ref. [60-62].

Tabelle 8. Ergebnisse fuer ^{166}Er .

Messwert	Experiment	Theorie	Greiner*
$g(2_1^+)$	0.329 0.312 0.305	0.339	0.325
$g(4_1^+)$	0.32 0.29	0.295	0.326
$\delta(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	-16^{+5}_{-12}	-21.2	-12.3
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_1^+)$	$-31^{+15}_{-\infty}$ $-18^{+9}_{-\infty}$	-29.7	-12.9
$\delta(3_1^+ \rightarrow 4_1^+)$	-9^{+5}_{-319}	-9.5	-7.2
$\delta(4_2^+ \rightarrow 4_1^+)$	-10^{+4}_{-27} $-3.3^{+1.2}_{-3.0}$	-11.4	-6.6
$\delta(5_1^+ \rightarrow 4_1^+)$	-20 ± 4 -37^{+3}_{-10} -16^{+5}_{-14}	-22.9	-8.1
$\delta(5_1^+ \rightarrow 6_1^+)$	-25 ± 3 $-85^{+45}_{-\infty}$	-5.4	-4.6
$\delta(6_2^+ \rightarrow 6_1^+)$	-20^{+9}_{-90}	-8.0	-4.6

Die experimentellen Werte stammen aus Ref. [46-49].

*) s. Bemerkung zu Tabelle 3.



THEORY	B (E2)	THEORY	EXPT.
— 6*	$0_1^+ \rightarrow 2_1^+$	5.330	4.750
— 5*	$0_1^+ \rightarrow 2_2^+$	0.149	0.069
— 4*	$2_2^+ \rightarrow 2_1^+$	0.081	0.132
— 3*	$2_1^+ \rightarrow 4_1^+$	2.790	2.500
— 2*	$4_1^+ \rightarrow 6_1^+$	2.530	1.780

DY 160

Fig. 16. Wie Fig. 10, jedoch fuer ^{160}Dy . Experimentelle Daten aus [61,64-65].
Z. T. wurden die B(E2)-Werte aus B(E2)-Verhaeltnissen ausgerechnet.

Tabelle 9. Ergebnisse fuer ^{160}Dy .

Messwert	Experiment	Theorie	Greiner*	B(E2)*
$g(2_1^+)$	0.364	0.177	0.360	----
	0.352			
	0.38			
	0.37			
	0.18			
$\delta(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	$-9.7^{+2.5}_{-1.7}$	-12.9	-9.6	0.081
	-13.5 ± 3.0			
$\delta(3_1^+ \rightarrow 2_1^+)$	-18 ± 5	-15.3	-10.8	0.053
$\delta(3_1^+ \rightarrow 4_1^+)$	$-7.0^{+2.6}_{-5.0}$	-6.9	-5.5	0.071
$\delta(4_2^+ \rightarrow 4_1^+)$		-6.9		0.097
$\delta(5_1^+ \rightarrow 4_1^+)$		-10.5		0.027
$\delta(5_1^+ \rightarrow 6_1^+)$		-4.2		0.108
$\delta(6_2^+ \rightarrow 6_1^+)$		-4.8		0.096

Experimentelle Werte aus Ref.[45,46,50,51].

*) s. Bemerkungen zu Tabelle 3.

ohne Kenntnis zusätzlicher $B(E2)$ -Werte wesentlich zu verbessern.

Die Greinersche Theorie liefert in diesem Fall durchweg etwas zu kleine Werte, was darauf hindeutet, dass der Zusammenhang (15.3) zwischen g_R -Faktor und der Konstanten D (ueber C) nicht gut erfuehlt ist. Die Systematik stimmt jedoch ebenso wie bei den Osmium- und Platin-Isotopen recht gut mit dem Experiment ueberein.

Ein zusammenfassender Ueberblick ueber die in dieser Arbeit erzielten Resultate laesst folgende wesentlichen Punkte hervortreten :

- 1) *Es wurde gezeigt, dass ein sehr allgemeiner Ansatz verschiedener Deformationen fuer Protonen und Neutronen bei konsistenter Behandlung der Dynamik zu kollektiven $M1$ -Uebergangen fuehrt, falls die Freiheitsgrade α und ξ durch ein Wechselwirkungspotential gekoppelt sind. Ein rein statischer Deformationsunterschied reicht i. a. nicht aus.*
- 2) *Die Beruecksichtigung des Kopplungspotentials in stoerungstheoretischer Naeherung fuehrt auf einen aehnlichen effektiven $M1$ -Operator wie im Greinerschen Modell [25], allerdings mit zwei zusaetzlichen freien Variablen.*
- 3) *Die Verwendung des VKM statt des Rotations-Vibrations-Modells fuer die Kernwellenfunktionen ergibt entscheidende Verbesserungen und erlaubt insbesondere erstmals die Erklaerung eines Vorzeichenwechsels der δ -Werte mit einem rein kollektiven Modell.*
- 4) *Um die experimentellen $B(E2)$ -Werte und andere Uebergangswahrscheinlichkeiten in jedem Fall befriedigend zu reproduzieren, muss bei der Anpassung der VKM-Potentialenergieflaeche schon auf diese Daten geachtet werden, d. h. sie muessen in den Fit mit einbezogen werden.*

Die in dieser Arbeit dargelegten Ergebnisse sind nur ein Schritt auf dem Wege einer kollektiven Theorie der magnetischen Kerneigenschaften.

die staendig wachsende Zahl von gemessenen Mischungsverhaeltnissen und auch die Arbeit an der Anpassung des VKM an weitere Nuklide werden bald weitere Rechnungen ermoeglichen. Dadurch sollte insbesondere die Moeglichkeit gegeben sein, durch Vergleich der Ergebnisse fuer eine groessere Zahl von Kernen Aufschluss ueber das Verhalten der Konstanten B_p/B , C und D zu gewinnen. Moegliche funktionale Zusammenhaenge zwischen diesen Groessen sind von grossem Interesse, da das gute Abschneiden der Greinerschen Theorie mit nur einem freien Parameter darauf hindeutet, dass nicht alle von ihnen wirklich unabhaengig sind. Andererseits ist es auch wuensenswert, Rechnungen fuer andere Kerntypen durchzufuehren; z. B. war unter den hier behandelten Kernen noch kein Vibrationskern, und es wird interessant sein, zu sehen, wie die Theorie fuer diesen Kerntypus abschneidet.

Literaturverzeichnis

- [1] K. Kumar and M. Baranger, Phys. Rev. Lett. 17 (1966) 1146.
- [2] K. Kumar and M. Baranger, Nucl. Phys. 92 (1967) 608.
- [3] M. Baranger and K. Kumar, Nucl. Phys. A110 (1968) 490.
- [4] M. Baranger and K. Kumar, Nucl. Phys. A112 (1968) 241.
- [5] K. Kumar and M. Baranger, Nucl. Phys. A110 (1968) 529.
- [6] K. Kumar and M. Baranger, Nucl. Phys. A122 (1968) 213.
- [7] K. Kumar, Phys. Lett. 29B (1969) 25.
- [8] G. Gneuss, Diplomarbeit, Universitaet Frankfurt am Main, 1967.
- [9] G. Gneuss, U. Mosel, and W. Greiner, Phys. Lett. 30B (1969) 397.
- [10] G. Gneuss, U. Mosel, and W. Greiner, Phys. Lett. 31B (1970) 269.
- [11] G. Gneuss and W. Greiner, Nucl. Phys. A171 (1971) 449.
- [12] D. R. Bès and G. G. Dussel, Nucl. Phys. A135 (1969) 1.
- [13] D. R. Bès and G. G. Dussel, Nucl. Phys. A135 (1969) 25.
- [14] G. G. Dussel and D. R. Bes, Nucl. Phys. A143 (1970) 623.
- [15] B. Sørensen, Nucl. Phys. A142 (1970) 392.
- [16] B. Sørensen, Nucl. Phys. A142 (1970) 411.
- [17] K. S. Krane and R. M. Steffen, Phys. Rev. C2 (1970) 724.
- [18] H. J. Rose and D. M. Brink, Rev. Mod. Phys. 39 (1967) 306.
- [19] P. J. Brussaard, Nucl. Phys. A158 (1970) 440.
- [20] S. G. Nilsson and O. Prior, Dansk. Mat.-Fys. Medd. no. 16, 32 (1961).
- [21] S. T. Belyaev, Dansk. Mat.-Fys. Medd. no. 11, 31 (1959).
- [22] A. Faessler, Nucl. Phys. 85 (1966) 653.
- [23] W. Greiner, Phys. Rev. Lett. 14 (1965) 599.
- [24] A. Faessler and W. Greiner, Z. Physik 179 (1964) 343.
- [25] W. Greiner, Nucl. Phys. 80 (1966) 417.

- [26] H. Stock and H. Arenhoevel, Z. Phys. 212 (1968) 83.
- [27] V. Rezwanl, G. Gneuss, and H. Arenhoevel, Nucl. Phys. A180 (1972) 254.
- [28] V. Rezwanl, Diplomarbeit, Universitaet Frankfurt am Main, 1971.
- [29] G. Racah, Phys. Rev. 76 (1949) 1352.
- [30] U. Fano and G. Racah, Irreducible Tensorial Sets, Academic Press, New York, 1959.
- [31] C. C. Noack, Nucl. Phys. A108 (1968) 493.
- [32] G. Gneuss, Dissertation, Universitaet Frankfurt am Main, 1970.
- [33] U. Schneider, Diplomarbeit, Universitaet Frankfurt am Main, 1971.
- [34] L. v. Bernus, Diplomarbeit, Universitaet Frankfurt am Main, 1971.
- [35] A. Bohr, Dan. Mat.-Fys. Medd. 26 no. 14 (1952).
- [36] A. Bohr and B. Mottelson, Dan. Mat.-Fys. Medd. 27 no. 16 (1953).
- [37] J. Eisenberg and W. Greiner, "Nuclear Models", North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970.
- [38] A. K. Kerman, Ann. Phys. (New York) 12 (1961) 300.
- [39] K. Kumar and M. Baranger, Nucl. Phys. A122 (1968) 273.
- [40] P. Camiz, A. Covello, and M. Jean, Nuovo Cimento 42B (1966) 199.
- [41] W. Greiner, Z. Physik 179 (1964) 343.
- [42] A. Messiah, "Quantum Mechanics", North Holland, Amsterdam, 1962.
- [43] R. Sedlmayr, M. Sedlmayr and W. Greiner, wird veroeffentlicht in Phys. Lett.
- [44] H. Helppi, A. Pakkanen and J. Hattula, Nucl. Phys. A223 (1974) 13.
- [45] J. H. Hamilton, Nuclear Structure Lectures, Alushta, UdSSR, April 13-28, 1972 (ed. by V. G. Soloviev), Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, UdSSR; S. 349-364.

- [46] L. Grodzins, Ann. Rev. Nucl. Sci. 18 (1968) 291.
- [47] J. M. Domingos, G. D. Symons, and A. G. Douglas, Nucl. Phys. A180 (1972) 600.
- [48] E. Gerdau, W. Krull, L. Mayer, J. Braunsfurth, J. Heisenberg, P. Steiner, and E. Bodenstedt, Z. Physik 174 (1963) 389.
- [49] C. W. Reich and J. E. Cline, Phys. Rev. 137B (1965) 1424.
- [50] R. Simon, I. Arens, R. S. Raghavan, and H. J. Koerner, Phys. Lett. 28B (19) 5 0.
- [51] K. S. Krane and R. M. Steffen, Nucl. Phys. A164 (1971) 439.
- [52] J. Lange, R. Rasera, H. F. Wagner, and W. Schaeffner, Nucl. Phys. A171 (1971) 92.
- [53] N. Rud and K. Bonde Nielsen, Nucl. Phys. A158 (1 70) 546.
- [54] Y. Bard, SIAM J. Num. Anal. 7 (1970) 157.
- [55] H. O. Hartley, Technometrics 3 (1961) 269.
- [56] D. W. Marquardt, J. SIAM 11 (1963) 431.
- [57] R. F. Casten, J. S. Greenberg, S. H. Sie, G. A. Burginyon, and D. A. Bromley, Phys. Rev. 187 (1969) 1532.
- [58] W. T. Milner, F. K. McGowan, R. L. Robinson, P. H. Stelson, and R. O. Sayer, Nucl. Phys. A177 (1971) 1.
- [59] E. J. Bruton, J. A. Cameron, A. W. Gibb, D. B. Kenyon, and L. Keszthelyi, Nucl. Phys. A152 (1970) 495.
- [60] P. H. Stelson and L. Grodzins, Nucl. Data (1965) 21.
- [61] Y. Yoshizawa, B. Elbek, B. Herskind, and M. C. Olesen, Nucl. Phys. 73 (1965) 273.
- [62] R. O. Sayer, P. H. Stelson, F. K. McGowan, W. T. Milner, and R. L. Robinson, Phys. Rev. C1 (1970) 1525.

- [63] K. R. Baker, J. H. Hamilton, J. Lange, A. V. Ramayya, V. Maruhn-Rezvani, J. J. Pinajian, and J. A. Maruhn, wird veroeffentlicht.
- [64] B. Elbek, M. C. Olesen, and O. Skilbreid, Nucl. Phys. 19 (1960) 523.
- [65] R. O. Sayer, E. Eichler, N. R. Johnson, D. C. Hensley, and L. L. Riedinger, private Mitteilung.
- [66] M. A. Ludington, J. J. Reidy, M. L. Wiedenbeck, D. J. McMillan, J. H. Hamilton, and J. J. Pinajian, Nucl. Phys. A119 (1968) 398.

Lebenslauf

Am 18. Mai 1945 wurde ich, Vida Maruhn, geb. Rezvani-Youssef, als Tochter des Beamten Valiollah Rezvani-Youssef und dessen Ehefrau Ghodsiye in Teheran (Iran) geboren.

Nach Grundschulbesuchen in Ghazvin und Esfahan von 1951 bis 1957 wechselte ich auf das Gymnasium in Yazd und ab 1959 in Gorgan, wo ich 1963 die Reifeprüfung ablegte.

1964 kam ich zum Studium nach Deutschland. Nach einem halbjährigen Deutschkursus und einem Jahr am Studienkolleg in Darmstadt begann ich im Sommersemester 1966 das Physikstudium an der Universität Frankfurt.

Von 1969 an wurde ich durch ein Stipendium des Deutschen Akademischen Austauschdienstes unterstützt, das bis zum Diplom währte. Nach Beendigung einer Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik in Frankfurt bestand ich im Juli 1971 die Diplomprüfung mit Auszeichnung.

Anschließend begann ich mit der Arbeit an meiner Dissertation am selben Institut. Während dieser Zeit erhielt ich anfanglich ein Doktorandenstipendium des DAAD, das ich aber dann zu Gunsten der Aufnahme einer Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin auslaufen liess.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren W. Greiner, W. Scheid, M. Huber, H. Arenhoevel, D. Drechsel, G. Suessmann, W. Franz, G. Koethe, W. Martienssen, H.-J. Queisser und P. Royen.

Meinem Lehrer, Herrn Professor Dr. Walter Greiner, moechte ich an dieser Stelle fuer die Anregung zu dieser Arbeit und sein stetes Interesse an ihrem Fortgang danken.

Mein Dank gilt weiterhin den Kolleginnen und Kollegen des Instituts fuer Theoretische Physik, insbesondere meinem lieben Mann Dr. J. A. Maruhn, Dr. A. Kappatsch und Dr. B. Fink, die in vielen Diskussionen zu dieser Arbeit beigetragen haben. Ausserdem bin ich den Kollegen R. und M. Sedlmayr fuer die Zurverfuegungstellung der Osmium-Daten zu Dank verpflichtet.

Ganz besonders moechte ich aber noch den Kollegen am Oak Ridge National Laboratory danken, insbesondere Herrn Dr. G. R. Satchler, der mir die Weiterfuehrung der Rechnungen dort ermoeeglichte. Weiterhin danke ich der Nuclear Data Gruppe am Oak Ridge National Laboratory fuer das Zusammenstellen einiger experimenteller Daten.

Nicht zuletzt bin ich Frau Utschig fuer das Zeichnen der Figuren und Herrn Brose fuer den Druck dankbar.

Die notwendigen numerischen Rechnungen wurden zum groesseren Teil auf der UNIVAC 1108 des Hochschulrechenzentrums Frankfurt durchgefuehrt, dessen Angestellten ich fuer mancherlei Hilfe danke. Die endgueltige Anpassung der Kopplungskonstanten erfolgte mit Hilfe der CDC-3300 der Physics Division am Oak Ridge National Laboratory.

